1.4) Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

$y''' - 4y' = 0$

$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 2 \qquad y''(0) = 4$

Характеристическое уравнение:

$k^3 - 4k = 0$

$k(k^2 - 4) = 0$

$k = 0$

$k = \pm 2$

Общее решение:

$y = A + Be^{-2x} + Ce^{2x}$

Учитываем начальные условия

$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 2 \qquad y''(0) = 4$

$y' = -2Be^{-2x} + 2Ce^{2x}$

$y'' = 4Be^{-2x} + 4Ce^{2x}$

$$\begin{cases} A + Be^0 + Ce^0 = 0 \\ -2Be^0 + 2Ce^0 = 2 \\ 4Be^0 + 4Ce^0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ -2B + 2C = 2 \\ 4B + 4C = 4 \end{cases} \Rightarrow A = -1 \quad B = 0 \quad C = 1$$

$y = -1 + e^{2x}$

2.4) Найти решение системы дифференциальных уравнений двумя способами:
а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка
в) с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x' = -2x - 3y \\ y' = -x \end{cases}$$

Приведём к уравнению второго порядка.

$$x'' = -2x' - 3y'$$

$$x'' = -2x' + 3\mathrm{x}$$

$$x'' + 2x' - 3x = 0$$

Характеристическое уравнение.

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad \mathrm{D} = 2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm 4}{2} = -3; 1$$

Общее решение: $\overline{x} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$

$$y' = -x$$

$$y' = -C_1 e^t - C_2 e^{-3t}$$

$$y = -C_1 e^t + \frac{1}{3} C_2 e^{-3t}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} \\ y(t) = -C_1 e^t + \frac{1}{3} C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(-\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1; -3$$

Решения ищем в виде: $\begin{cases} x_1 = \alpha_1 C_1 e^t \\ y_1 = \beta_1 C_1 e^t \end{cases} u \begin{cases} x_2 = \alpha_2 C_2 e^{-3t} \\ y_2 = \beta_2 C_2 e^{-3t} \end{cases}$

При λ=1

$$\begin{cases} (-2-1)\alpha_1 - 3\beta_1 = 0 \\ -\alpha_1 - \beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha_1 - 3\beta_1 = 0 \\ -\alpha_1 - \beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 1; \beta_1 = -1$$

При λ=-3 $\begin{cases} (-2-(-3))\alpha_2 - 3\beta_2 = 0 \\ -\alpha_2 + 3\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 - 3\beta_2 = 0 \\ -\alpha_2 + 3\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 1; \beta_2 = \frac{1}{3}$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} \\ y(t) = -C_1 e^t + \frac{1}{3} C_2 e^{-3t} \end{cases}$

3.4) Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольной постоянной.

$$y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Замена: $y' = z \Rightarrow y''' = z''$

$$z'' + z = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$\bar{z} = C_1 \cos x + C_2 \sin x \qquad C_1 = C_1(x); \quad C_2 = C_2(x)$$

$$\bar{z} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

$$z' = C_1'(x)\cos x - C_1(x)\sin x + C_2'(x)\sin x + C_2(x)\cos x$$

Пусть: $C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$

$$z' = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$$

$$z'' = -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x - C_1(x)\cos x - C_2(x)\sin x$$

Подставляем в исходное уравнение

$$-C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x - C_1(x)\cos x - C_2(x)\sin x + C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$-C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{matrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta C_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad \Delta C_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta C_1}{\Delta} = \frac{-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta C_2}{\Delta} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int (1 - \frac{1}{\cos^2 x})dx = x - tgx + C_3$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C_4$$

$$\bar{z} = (x - tgx + C_3)\cos x + (C_4 - \ln|\cos x|)\sin x = x\cos x - tgx \cdot \cos x + C_3\cos x + C_4\sin x -$$

$$-\ln|\cos x| \cdot \sin x = x\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + C_3\cos x + C_4\sin x - \ln|\cos x| \cdot \sin x =$$

$$= x\cos x - \sin x + C_3\cos x + C_4\sin x - \ln|\cos x| \cdot \sin x = (x + C_3)\cos x + (C_4 - 1)\sin x -$$

$$-\ln|\cos x| \cdot \sin x = y'$$

$$y = \int((x + C_3)\cos x + (C_4 - 1)\sin x - \ln|\cos x| \cdot \sin x)dx =$$

$$= \int(x + C_3)\cos x dx + C_5\int \sin x dx - \int \ln|\cos x| \cdot \sin x dx$$

Вычисляем отдельно:

$$\int(x + C_3)\cos x dx = \left| \begin{matrix} x + C_3 = U \Rightarrow dU = dx \\ \cos x dx = dV \Rightarrow V = \sin x \end{matrix} \right| = (x + C_3)\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= (x + C_3)\sin x + \cos x$$

$$C_5\int \sin x dx = -C_5\cos x$$

$$\int \ln|\cos x| \cdot \sin x dx = -\int \ln|\cos x| d(\cos x) = -\cos x \ln|\cos x| + \cos x$$

Итого получаем:

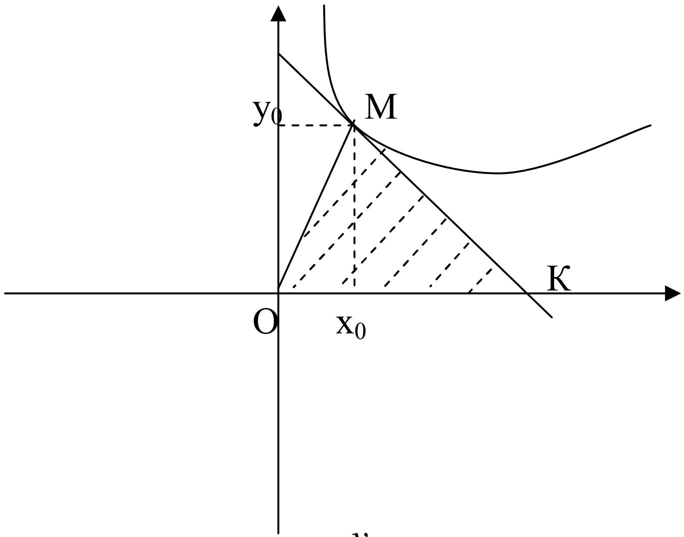
$$y = (x + C_3)\sin x + \cos x - C_5\cos x - \cos x \ln|\cos x| + \cos x + C_6 = (x + C_3)\sin x +$$

$$+(2 - C_5)\cos x - \cos x \ln|\cos x| + C_6 = (x + C_3)\sin x + C_7\cos x - \cos x \ln|\cos x| + C_6$$

Ответ: $y = (x + C_3)\sin x + C_7\cos x - \cos x \ln|\cos x| + C_6$

4.4) Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

Строим схематический чертёж.



Kx_0 – подкасательная. Её длина: $|Kx_0| = \dfrac{y}{y'}$ OK=$|Kx_0| + x = \dfrac{y}{y'} + x$

Mx_0 – значение ординаты точки касания. $|Mx_0| = y$

Площадь треугольника: $S = \dfrac{1}{2}ac$

По условию:

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{y}{y'}+x)\cdot y = a^2 \Rightarrow \frac{y^2}{y'} + xy = 2a^2 \Rightarrow y^2 + xyy' = 2a^2 y' \Rightarrow y^2 = 2a^2 y' - xyy' = y'(2a^2 - xy)$$

$$y' = \frac{y^2}{2a^2 - xy} \Rightarrow x' = \frac{2a^2 - xy}{y^2} = 2a^2 \cdot \frac{1}{y^2} - \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 2a^2 \cdot \frac{1}{y^2}$$

Решаем без правой части

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y} \qquad \ln|x| = -\ln|y| + \ln C = \ln\left|\frac{C}{y}\right|$$

$$x = \frac{C}{y} \qquad C = C(y) \Rightarrow x = \frac{C(y)}{y} \Rightarrow x' = \frac{C'(y)y - C(y)}{y^2} = \frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2}$$

$$\frac{C'(y)}{y} - \frac{C(y)}{y^2} + \frac{C(y)}{y^2} = 2a^2 \cdot \frac{1}{y^2} \qquad C'(y) = \frac{2a^2}{y} \Rightarrow C(y) = \int \frac{2a^2}{y} dy = 2a^2 \ln|y| + C_1$$

$$x = \frac{2a^2 \ln|y| + C_1}{y}$$