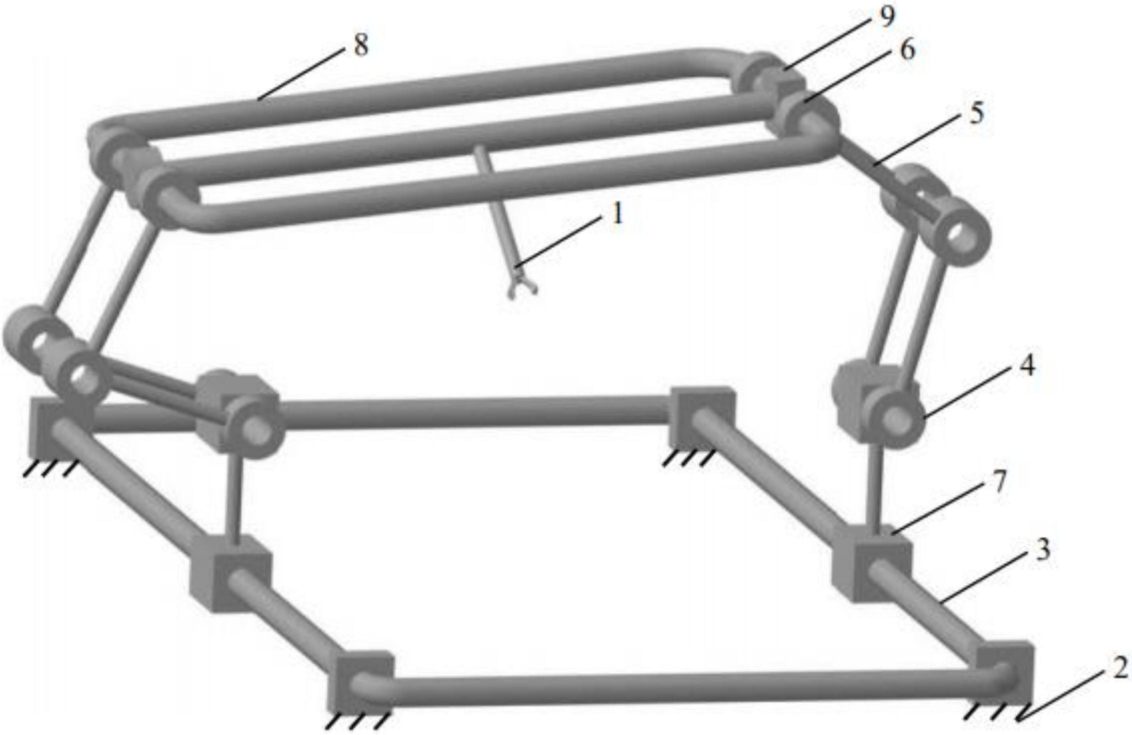
1. Решить задачу о позициях



Рассчитаем переходную матрицу из системы координат основания к системе координат выходного звена. Для получения матрицы размера 4х4 учитываются движения: вращение вокруг оси OY на угол β, затем вокруг оси OX на угол α. Кроме того, имеет место смещение вдоль осей OX, OY, OZ на расстояние x, y z, где A0 (x, y z) – точка крепления инструмента в системе координат основания.

Вращение вокруг оси OY описывается следующим образом (матрица Aβ):

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вращение вокруг оси OX (матрица Aα):

$$Axyz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Смещение вдоль осей описывается матрицей $Axyz$:
Перемножая матрицы преобразований, получаем переходную матрицу:

$$M = AxyzA_{\alpha}A_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & x \\ \sin(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) & y \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\beta)\cos(\alpha) & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, рассматривается переход точки A0 из системы координат выходного звена в систему координат основания. Производим перемещение на длину крепления инструмента вверх на величину L1, чтобы попасть в плоскость рамки:

$$Az1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее необходимо провести поворот вокруг OY на угол β:

$$A_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

затем поворот на угол α вокруг OX:

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

после этого происходит перемещение вдоль осей OXYZ на величины x1, y1, z1, где (x1, y1, z1) – геометрический центр рамки 8 (точка A1)

$$A1xyz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x1 \\ 0 & 1 & 0 & y1 \\ 0 & 0 & 1 & z1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем матрицу преобразования M1

$$M1 = A1xyzA_{\alpha}A_{\beta}Az1 = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & x1 - L_1 \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) & y1 + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\beta)\cos(\alpha) & z1 - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая матрицы преобразования M M 1 = , выводим систему линейных уравнений:

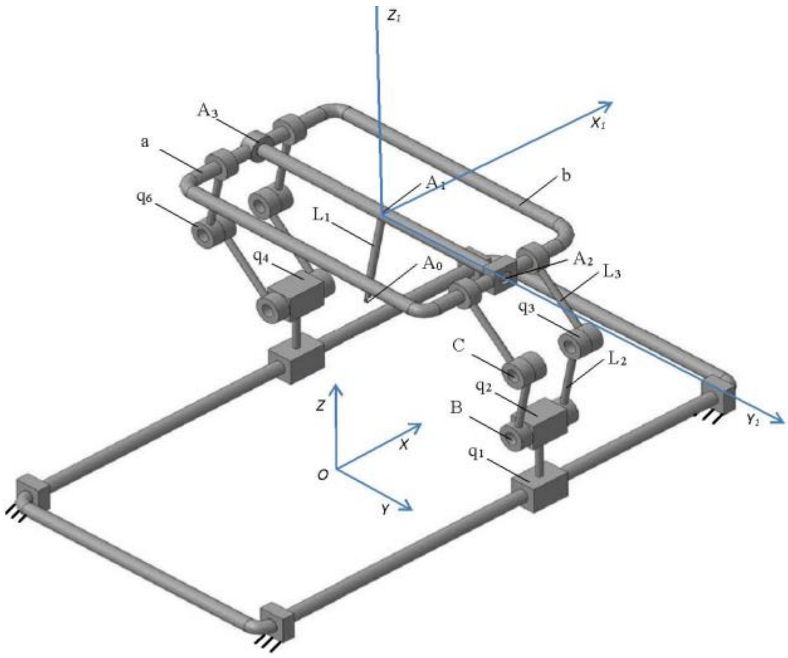
$$\begin{cases} x1 = x + L_1 \cdot \sin(\beta); \\ y1 = y - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha); \\ z1 = z + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha). \end{cases}$$

С учетом (3.1), матрица A xyz 1 принимает вид:

$$A1xyz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x + L_1 \cdot \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 & y - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & z + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

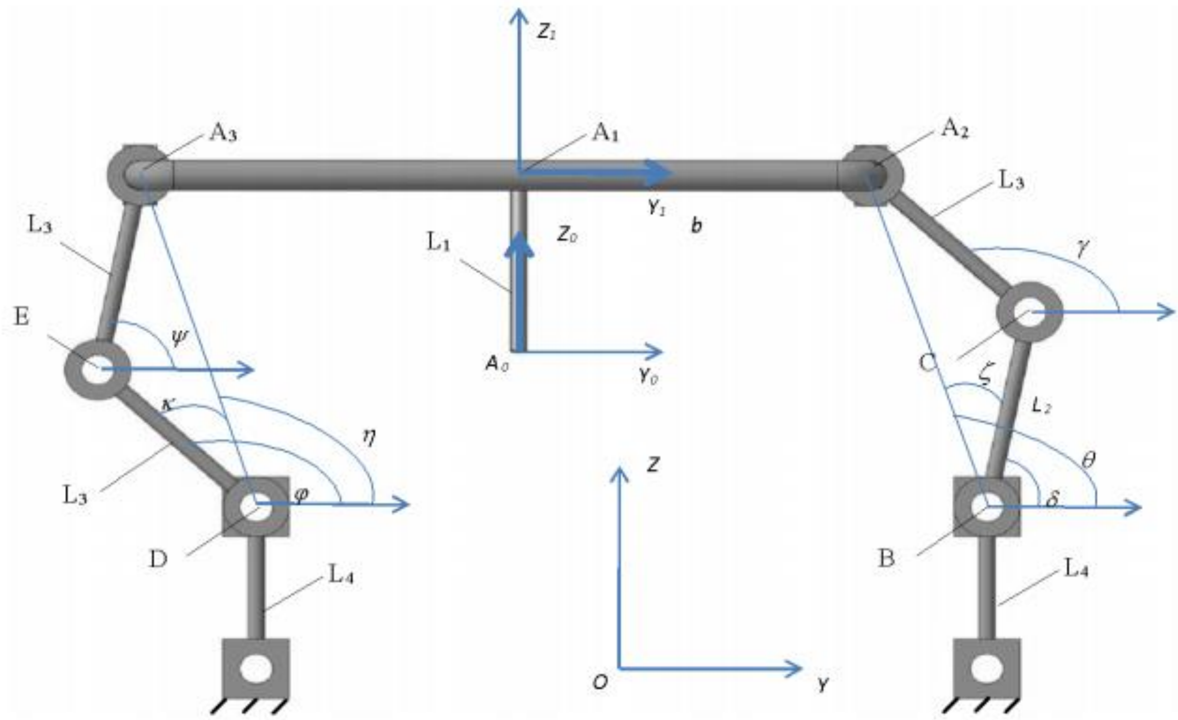
Матрица преобразования в систему координат основания MP , учитывающая поворот рамки вокруг оси OX, имеет вид:

$$MP = A1xyz \cdot A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x + L_1 \cdot \sin(\beta) \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & y - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & z + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Для нахождения перемещений в приводах, зададим геометрические размеры подвижной рамки. Сторона, параллельная оси OX, обозначается a, а параллельная оси OY – b (Рис. 3.1). Задаем точки A2 и A3, располагающиеся в центрах пересечения подвижной рамки и оси вращения выходного звена. Координаты точек A2 и A3 в системе координат A1X1Y1Z1 с центром в точке A1

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Для получения координат точек А2 и А3 в системе координат основания, необходимо применить матрицу преобразования МР :

$$A_{2_{ZA}} = MP \cdot A_2;\, A_{3_{ZA}} = MP \cdot A_3;$$

$$A_{2_{ZA}} = \begin{pmatrix} x + L_1 \cdot \sin(\beta) \\ y + \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) \\ z + \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix};\, A_{3_{ZA}} = \begin{pmatrix} x + L_1 \cdot \sin(\beta) \\ y - \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) \\ z - \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Точки соединения промежуточных звеньев обозначим B (xb yb zb , ,) , C (xc yc zc , ,) , D (xd yd zd , ,) и E (xe ye ze , ,) (Рис. 3.2). Звенья, соединяющие точки А2,С и А3,E обозначим L3, C,B и D,E - L2. Тогда имеет место уравнение, связывающее координаты точек А2 и С:

$$L_{AC}^{\ 2} = \left(A_{2zax} - C_x\right)^2 + \left(A_{2zay} - C_y\right)^2 + \left(A_{2zaz} - C_z\right)^2.$$

При этом величина LAC является известной. Подставляем значения координат:

$$L_{AC}^{\ 2} = \left(\left(x + L_1 \cdot \sin(\beta)\right) - xc\right)^2 + \left(\left(y + \frac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)\right) - yc\right)^2 + \\ + \left(\left(z + \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha)\right) - zc\right)^2. \tag{3.3}$$

Введем обозначение угла между промежуточным звеном L2 и плоскостью OXY - δ , а угол между звеном L3 и плоскостью OXY - γ . Тогда координаты точки C можно выразить через координаты точки B:

$$\begin{cases} xc = xb; \\ yc = yb + L_2 \cdot \cos(\delta); \\ zc = zb + L_2 \cdot \sin(\delta). \end{cases}$$

Таким образом, уравнение (3.3) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\left((x + L_1 \cdot \sin(\beta)) - xb\right)^2 + \left(\left(y + \frac{b \cdot \cos(\beta)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)\right) - (yb + L_2 \cdot \cos(\delta))\right)^2 + \\ &+ \left(\left(z + \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha)\right) - (zb + L_2 \cdot \sin(\delta))\right)^2 - L_{AC}{}^2 = 0. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Решая уравнение (3.4), можно найти величину угла δ , который должен составлять между звеном L2 и плоскостью OXY. В процессе преобразований уравнение (3.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{b^2}{4} - L_{AC}^2 + L_2^2 + y^2 + yb^2 + z^2 + zb^2 + L_1^2 \cdot \cos(\beta)^2 - 2 \cdot y \cdot yb - 2 \cdot z \cdot zb + b \cdot y \cdot \cos(\alpha) - \\ &- b \cdot yb \cdot \cos(\alpha) + b \cdot z \cdot \sin(\alpha) - b \cdot zb \cdot \sin(\alpha) - 2 \cdot L_1 \cdot y \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \\ &+ 2 \cdot L_1 \cdot yb \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot L_1 \cdot z \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot L_1 \cdot zb \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \\ &+ (x - xb + L_1 \cdot \sin(\beta))^2 - 2 \cdot L_2 \cdot y \cdot \cos(\delta) + 2 \cdot L_2 \cdot yb \cdot \cos(\delta) - 2 \cdot L_2 \cdot z \cdot \sin(\delta) + \\ &+ 2 \cdot L_2 \cdot zb \cdot \sin(\delta) - b \cdot L_2 \cdot \cos(\delta)\cos(\alpha) - b \cdot L_2 \cdot \sin(\delta)\sin(\alpha) - \\ &- 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(\beta)\cos(\alpha)\sin(\delta) + 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(\beta)\sin(\alpha)\cos(\delta) = 0. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Группируем члены уравнения (3.5), в состав которых входит угол δ :

$$\begin{aligned} pr1 = &-2 \cdot L_2 \cdot y \cdot \cos(\delta) + 2 \cdot L_2 \cdot yb \cdot \cos(\delta) - 2 \cdot L_2 \cdot z \cdot \sin(\delta) + \\ &+ 2 \cdot L_2 \cdot zb \cdot \sin(\delta) - b \cdot L_2 \cdot \cos(\delta)\cos(\alpha) - b \cdot L_2 \cdot \sin(\delta)\sin(\alpha) - \\ &- 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(\beta)\cos(\alpha)\sin(\delta) + 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(\beta)\sin(\alpha)\cos(\delta), \end{aligned} \qquad (3.6)$$

и без угла δ :

$$\begin{aligned} pr2 = &\frac{b^2}{4} - L_{AC}^2 + L_2^2 + y^2 + yb^2 + z^2 + zb^2 + L_1^2 \cdot \cos(\beta)^2 - 2 \cdot y \cdot yb - 2 \cdot z \cdot zb + b \cdot y \cdot \cos(\alpha) - \\ &- b \cdot yb \cdot \cos(\alpha) + b \cdot z \cdot \sin(\alpha) - b \cdot zb \cdot \sin(\alpha) - 2 \cdot L_1 \cdot y \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \\ &+ 2 \cdot L_1 \cdot yb \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot L_1 \cdot z \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - 2 \cdot L_1 \cdot zb \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \\ &+ (x - xc + L_1 \cdot \sin(\beta))^2. \end{aligned}$$

Для упрощения работы с преобразованиями, сгруппируем отдельно члены уравнения (3.6), в которые входят cos(δ) и sin (δ) :

$$-2\cdot L_2\cdot y\cdot\cos(\delta)+2\cdot L_2\cdot yb\cdot\cos(\delta)-$$
$$-b\cdot L_2\cdot\cos(\delta)\cos(\alpha)+2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\sin(\alpha)\cos(\delta);$$
$$-2\cdot L_2\cdot z\cdot\sin(\delta)+2\cdot L_2\cdot zb\cdot\sin(\delta)-$$
$$-b\cdot L_2\cdot\sin(\delta)\sin(\alpha)-2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\cos(\alpha)\sin(\delta).$$

Вынесем в данных уравнениях за скобки соответственно cos(δ) и sin (δ) и введем обозначения:

$$pr1\cos=-2\cdot L_2\cdot y+2\cdot L_2\cdot yb-b\cdot L_2\cdot\cos(\alpha)+2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\sin(\alpha);$$

$$pr1\sin=-2\cdot L_2\cdot z+2\cdot L_2\cdot zb-b\cdot L_2\cdot\sin(\alpha)-2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\cos(\alpha).$$

С учетом введенных обозначений уравнение (3.4) принимает вид:

$$\sin(\delta)\cdot pr1\sin+\cos(\delta)\cdot pr1\cos=-pr2.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$pr1\sin\cdot\sin(\delta)+pr1\cos\cdot\sqrt{1-(\sin(\delta))^2}=-pr2;$$

$$\left(pr1\cos\cdot\sqrt{1-(\sin(\delta))^2}\right)^2=(-pr2-pr1\sin\cdot\sin(\delta))^2;$$

$$pr1\cos^2\cdot\left(1-(\sin(\delta))^2\right)=pr2^2+2\cdot pr2\cdot pr1\sin\cdot\sin(\delta)+pr1\sin^2\cdot\sin(\delta)^2;$$

$$pr1\cos^2-pr1\cos^2\cdot(\sin(\delta))^2=pr2^2+2\cdot pr2\cdot pr1\sin\cdot\sin(\delta)+pr1\sin^2\cdot\sin(\delta)^2;$$

$$pr2^2+2\cdot pr2\cdot pr1\sin\cdot\sin(\delta)+pr1\sin^2\cdot\sin(\delta)^2+pr1\cos^2\cdot\sin(\delta)^2-pr1\cos^2=0;$$

$$\left(pr1\sin^2+pr1\cos^2\right)\cdot\sin(\delta)^2+2\cdot pr2\cdot pr1\sin\cdot\sin(\delta)+\left(pr2^2-pr1\cos^2\right)=0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$D=(2\cdot pr2\cdot pr1\sin)^2-4\left(pr1\sin^2+pr1\cos^2\right)\cdot\left(pr2^2-pr1\cos^2\right);$$

$$\sin(\delta)_1=\frac{-2\cdot pr2\cdot pr1\sin+\sqrt{D}}{2\cdot\left(pr1\sin^2+pr1\cos^2\right)};$$

$$\sin(\delta)_2=\frac{-2\cdot pr2\cdot pr1\sin-\sqrt{D}}{2\cdot\left(pr1\sin^2+pr1\cos^2\right)}.$$

Таким образом, получаем значение угла δ , которое необходимо выставить в точке B между звеном BC и плоскостью OXY для получения исходных данных. Значение обобщенной координаты 1 q получим из системы (3.1):

$$x1=x+L_1\cdot\sin(\beta).$$

Значение угла γ между звеном L3 и плоскостью OXY получим из уравнения:

$$\cos\gamma = \frac{A_{2cxy} - yc}{L_3}.$$

С учетом изложенного выше, получаем:

$$\cos\gamma = \frac{-yb - L_2\cdot\cos(\delta) + y + \dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)}{L_3}.$$

Значеня углов φ и ψ находим аналогично значениям углов δ и γ. Для этого запишем уравнение:

$$L_{AE}{}^2 = (A_{3exx} - E_x)^2 + (A_{3exy} - E_y)^2 + (A_{3exz} - E_z)^2.$$

Поставляем значения координат:

$$L_{AE}{}^2 = \left(\left(x + L_1\cdot\sin(\beta)\right) - xe\right)^2 + \left(\left(y - \frac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)\right) - ye\right)^2 +$$

$$+\left(\left(z - \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{2} + L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)\right) - ze\right)^2.$$

Введем обозначение угла между промежуточным звеном L2 и плоскостью OXY - φ, а угол между звеном L3 и плоскостью OXY - ψ (Рис. 3.2). Тогда координаты точки E можно выразить через координаты точки D:

$$\begin{cases} xe = xd; \\ ye = yd + L_2\cdot\cos(\varphi); \\ ze = zd + L_2\cdot\sin(\varphi). \end{cases}$$

Таким образом, имеем уравнение:

$$\left(\left(x + L_1\cdot\sin(\beta)\right) - xd\right)^2 +$$

$$+\left(\left(y - \frac{b\cdot\cos(\beta)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)\right) - \left(yd + L_2\cdot\cos(\varphi)\right)\right)^2 +$$

$$+\left(\left(z - \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{2} + L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)\right) - \left(zd + L_2\cdot\sin(\varphi)\right)\right)^2 - L_{AE}{}^2 = 0.$$

Решая данное уравнение, можно найти величину угла φ, который должен составлять между звеном L2 и плоскостью OXY. В процессе преобразований указанное уравнение принимает вид

$$\frac{b^2}{4}-L_{AE}{}^2+L_2^2+y^2+yb^2+z^2+zb^2+L_1^2\cdot\cos(\beta)^2-2\cdot y\cdot yd-2\cdot z\cdot zd-d\cdot y\cdot\cos(\alpha)+$$
$$+d\cdot yd\cdot\cos(\alpha)-d\cdot z\cdot\sin(\alpha)+d\cdot zb\cdot\sin(\alpha)-2\cdot L_1\cdot y\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)+$$
$$+2\cdot L_1\cdot yd\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)+2\cdot L_1\cdot z\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)-2\cdot L_1\cdot zd\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)+$$
$$+\left(x-xd+L_1\cdot\sin(\beta)\right)^2-2\cdot L_2\cdot y\cdot\cos(\varphi)+2\cdot L_2\cdot yd\cdot\cos(\varphi)-2\cdot L_2\cdot z\cdot\sin(\varphi)+$$
$$+2\cdot L_2\cdot zd\cdot\sin(\varphi)+d\cdot L_2\cdot\cos(\varphi)\cos(\alpha)+d\cdot L_2\cdot\sin(\varphi)\sin(\alpha)-$$
$$-2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\cos(\alpha)\sin(\varphi)+2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\sin(\alpha)\cos(\varphi)=0.$$

Группируем члены данного уравнения, в состав которых входит угол φ :

$$pr3=-2\cdot L_2\cdot y\cdot\cos(\varphi)+2\cdot L_2\cdot yd\cdot\cos(\varphi)-2\cdot L_2\cdot z\cdot\sin(\varphi)+$$
$$+2\cdot L_2\cdot zd\cdot\sin(\varphi)+d\cdot L_2\cdot\cos(\varphi)\cos(\alpha)+d\cdot L_2\cdot\sin(\varphi)\sin(\alpha)-$$
$$-2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\cos(\alpha)\sin(\varphi)+2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\sin(\alpha)\cos(\varphi)=0,$$

без угла φ :

$$pr4=\frac{b^2}{4}-L_{AE}{}^2+L_2^2+y^2+yb^2+z^2+zb^2+L_1^2\cdot\cos(\beta)^2-2\cdot y\cdot yd-2\cdot z\cdot zd-d\cdot y\cdot\cos(\alpha)+$$
$$+d\cdot yd\cdot\cos(\alpha)-d\cdot z\cdot\sin(\alpha)+d\cdot zb\cdot\sin(\alpha)-2\cdot L_1\cdot y\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)+2\cdot L_1\cdot yd\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)+$$
$$+2\cdot L_1\cdot z\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)-2\cdot L_1\cdot zd\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)+\left(x-xd+L_1\cdot\sin(\beta)\right)^2.$$

Для упрощения работы с преобразованиями, введем обозначения:

$$pr3\cos=-2\cdot L_2\cdot y+2\cdot L_2\cdot yd+d\cdot L_2\cos(\alpha)+2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\sin(\alpha);$$

$$pr3\sin=-2\cdot L_2\cdot z+2\cdot L_2\cdot zd+d\cdot L_2\sin(\alpha)-2\cdot L_1\cdot L_2\cdot\cos(\beta)\cos(\alpha).$$

С учетом введенных обозначений имеем:

$$\sin(\varphi)\cdot pr3\sin+\cos(\varphi)\cdot pr3\cos=-pr4.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$pr3\sin\cdot\sin(\varphi)+pr3\cos\cdot\sqrt{1-(\sin(\varphi))^2}=-pr4;$$

$$\left(pr3\cos\cdot\sqrt{1-(\sin(\varphi))^2}\right)^2=\left(-pr4-pr3\sin\cdot\sin(\varphi)\right)^2;$$

$$pr3\cos^2\cdot\left(1-(\sin(\varphi))^2\right)-pr4^2+2\cdot pr4\cdot pr3\sin\cdot\sin(\varphi)+pr3\sin^2\cdot\sin(\varphi)^2;$$

$$pr3\cos^2-pr3\cos^2\cdot(\sin(\varphi))^2=pr4^2+2\cdot pr4\cdot pr3\sin\cdot\sin(\varphi)+pr3\sin^2\cdot\sin(\varphi)^2;$$

$$pr4^2+2\cdot pr4\cdot pr1\sin\cdot\sin(\varphi)+pr3\sin^2\cdot\sin(\varphi)^2+pr3\cos^2\cdot\sin(\varphi)^2-pr3\cos^2=0;$$

$$\left(pr3\sin^2+pr3\cos^2\right)\cdot\sin(\varphi)^2+2\cdot pr4\cdot pr3\sin\cdot\sin(\varphi)+\left(pr4^2-pr3\cos^2\right)=0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$D_2 = \left(-2\cdot pr4\cdot pr3\sin\right)^2 - 4\left(pr3\sin^2 + pr3\cos^2\right)\cdot\left(pr4^2 - pr3\cos^2\right);$$

$$\sin(\varphi)_1 = \frac{-2\cdot pr4\cdot pr3\sin + \sqrt{D_2}}{2\cdot\left(pr3\sin^2 + pr3\cos^2\right)};$$

$$\sin(\varphi)_2 = \frac{-2\cdot pr4\cdot pr3\sin - \sqrt{D_2}}{2\cdot\left(pr3\sin^2 + pr3\cos^2\right)}.$$

Значение угла ψ между звеном L3 и плоскостью OXY получим из уравнения:

$$\cos\psi = \frac{A_{3zгу} - ye}{L_3}.$$

С учетом введенных обозначений, получаем:

$$\cos\psi = \frac{-yd - L_2\cdot\cos(\varphi) + y - \dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)}{L_3}.$$

Таким образом, решением задачи о положениях является система функций, определяющих положение приводов в зависимости от положения выходного звена и начальных параметров задачи, причем привод 6 q является добавочным:

$$\begin{cases} q_1 = x + L_1\cdot\sin(\beta); \\ q_2 = \arcsin\left(\dfrac{-2\cdot pr2\cdot pr1\sin + \sqrt{D}}{2\cdot\left(pr1\sin^2 + pr1\cos^2\right)}\right); \\ q_3 = \arccos\left(\dfrac{-yb - L_2\cdot\cos(\delta) + y + \dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)}{L_3}\right); \\ q_4 = \arcsin\left(\dfrac{-2\cdot pr4\cdot pr3\sin \pm \sqrt{D_2}}{2\cdot\left(pr3\sin^2 + pr3\cos^2\right)}\right); \\ q_5 = \beta; \\ q_6 = \arccos\left(\dfrac{-yd - L_2\cdot\cos(\varphi) + y - \dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)}{L_3}\right). \end{cases} \quad (3.7)$$

2-аналогичный способ решения!Для проверки полученных результатов, а также получения более удобного для последующего дифференцирования вида решения используем альтернативный подход для решения задачи положений. Рассмотрим плоскую часть механизма (Рис. 3.2). В прямоугольном треугольнике с гипотенузой AB2 , один из катетов находится на коллинеарном вектору OY векторе, выходящем из точки B, а другой катет находится на коллинеарном вектору OZ векторе, выходящем из точки A2 . Введем обозначение угла между звеном, соединяющим точки A2,B и плоскостью OXY - θ , угол между звеном, соединяющим точки A2,B и звеном L2 - ζ . Таким образом, имеет место равенство:

$$A_2B^2 = \left(A_{2глz} - zb\right)^2 + \left(A_{2глy} - yb\right)^2.$$

При этом угол θ можно рассчитать из выражения

$$\cos\theta = \frac{A_{2глy} - yb}{A_2B} = \frac{A_{2глy} - yb}{\sqrt{\left(A_{2глz} - zb\right)^2 + \left(A_{2глy} - yb\right)^2}}.$$

Рассматривая треугольник AB2 C , согласно теореме косинусов, имеет место равенство:

$$A_2C^2 = A_2B^2 + BC^2 - 2 \cdot A_2\mathrm{B} \cdot BC \cdot cos\varsigma.$$

Учитывая введенные ранее обозначения звеньев, выразим значение угла:

$$\cos\gamma = \frac{A_2B^2 + BC^2 - A_2C^2}{2 \cdot A_2\mathrm{B} \cdot \mathrm{BC}} = \frac{(A_{2глz} - z_b)^2 + (A_{2глy} - y_b)^2 + L_2^2 - L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{(A_{глz} - z_b)^2 + (A_{2глy} - y_b)^2}}.$$

Искомый угол δ (Рис. 3.2) можно выразить:

$$\delta = \theta \pm \zeta.$$

Таким образом, угол δ можно найти из выражения:

$$\delta = \arccos\left(\frac{A_{2глy} - yb}{\sqrt{\left(A_{2глz} - zb\right)^2 + \left(A_{2глy} - yb\right)^2}}\right) \pm \arccos\left(\frac{\left(A_{2глz} - zb\right)^2 + \left(A_{2глy} - yb\right)^2 + L_2^2 - L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{\left(A_{2глz} - zb\right)^2 + \left(A_{2глy} - yb\right)^2}}\right).$$

С учетом (3.2), выражение принимает вид:

$$\delta = \arccos\left(\frac{y + \frac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - yb}{\sqrt{\left(z + \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{2} + L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - zb\right)^2 + \left(y + \frac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - yb\right)^2}}\right) \pm$$

$$\pm\arccos\left(\frac{\left(z + \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{2} + L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - zb\right)^2 + \left(y + \frac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - yb\right)^2 + L_2^2 - L_3^2}{2\cdot L_2\cdot\sqrt{\left(z + \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{2} + L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - zb\right)^2 + \left(y + \frac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - yb\right)^2}}\right).$$

Аналогичным образом рассмотрим треугольник с гипотенузой A_3D. Один из катетов находится на коллинеарном вектору OY векторе, выходящем из точки D, а другой катет находится на коллинеарном вектору OZ векторе, выходящем из точки A_3.). Также обо значим угол между звеном, соединяющим точки A_3,D и плоскостью OXY - η, угол между звеном, соединяющим точки A_3,D и звеном L_2 - κ. Точки B и D соединяют с основанием звенья L_4. Таким образом, имеет место равенство:

$$A_3D^2 = \left(A_{3zz} - zd\right)^2 + \left(A_{3zy} - yd\right)^2.$$

При этом угол η можно рассчитать из выражения:

$$\cos\eta = \frac{A_{3zy} - yd}{A_3D} = \frac{A_{3zy} - yd}{\sqrt{\left(A_{3zz} - zd\right)^2 + \left(A_{3zy} - yd\right)^2}}.$$

Рассматривая треугольник A_3DE, согласно теореме косинусов, имеет место равенство:

$$A_3E^2 = A_3D^2 + DE^2 - 2\cdot A_3D\cdot DE\cdot\cos\kappa.$$

Учитывая введенные ранее обозначения звеньев, выразим значение угла:

$$\cos\kappa = \frac{A_3D^2 + DE^2 - A_3E^2}{2\cdot A_3D\cdot DE} = \frac{\left(A_{3zz} - zd\right)^2 + \left(A_{3zy} - yd\right)^2 + L_2^{\,2} - L_3^{\,2}}{2\cdot L_2\cdot\sqrt{\left(A_{3zz} - zd\right)^2 + \left(A_{3zy} - yd\right)^2}}.$$

Искомый угол φ (Рис. 3.2) можно выразить

$$\varphi = \eta \pm \kappa.$$

Таким образом, с учетом изложенного выше, угол φ можно найти из выражения:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{A_{3zy} - yd}{\sqrt{\left(A_{3zz} - zd\right)^2 + \left(A_{3zy} - yd\right)^2}}\right) \pm \arccos\left(\frac{\left(A_{3zz} - zd\right)^2 + \left(A_{3zy} - yd\right)^2 + L_2^{\,2} - L_3^{\,2}}{2\cdot L_2\cdot\sqrt{\left(A_{3zz} - zd\right)^2 + \left(A_{3zy} - yd\right)^2}}\right).$$

С учетом (3.2), выражение принимает вид:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{y - \dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - yd}{\sqrt{\left(z - \dfrac{b\cdot\sin(\alpha)}{2} + L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - zd\right)^2 + \left(y - \dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - yd\right)^2}}\right) \pm$$

$$\pm\arccos\left(\frac{\left(z - \dfrac{b\cdot\sin(\alpha)}{2} + L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - zd\right)^2 + \left(y - \dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - yd\right)^2 + L_2^{\,2} - L_3^{\,2}}{2\cdot L_2\cdot\sqrt{\left(z - \dfrac{b\cdot\sin(\alpha)}{2} + L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - zd\right)^2 + \left(y - \dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2} - L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) - yd\right)^2}}\right).$$

Таким образом альтернативным решением задачи о положениях будет являться система:

$$
\begin{cases}
q_1 = x + L_1 \cdot \sin(\beta); \\
q_2 = \arccos\left(\dfrac{y + \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - yb}{\sqrt{\left(z + \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - zb \right)^2 + \left(y + \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - yb \right)^2}} \right) \pm \\
\qquad \pm \arccos\left(\dfrac{\left(z + \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - zb \right)^2 + \left(y + \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - yb \right)^2 + L_2^2 - L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{\left(z + \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - zb \right)^2 + \left(y + \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - yb \right)^2}} \right); \\
q_3 = \arccos\left(\dfrac{-yb - L_2 \cdot \cos(\delta) + y + \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)}{L_3} \right); \\
q_4 = \arccos\left(\dfrac{y - \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - yd}{\sqrt{\left(z - \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - zd \right)^2 + \left(y - \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - yd \right)^2}} \right) \pm \\
\qquad \pm \arccos\left(\dfrac{\left(z - \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - zd \right)^2 + \left(y - \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - yd \right)^2 + L_2^2 - L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{\left(z - \dfrac{b \cdot \sin(\alpha)}{2} + L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - zd \right)^2 + \left(y - \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - yd \right)^2}} \right); \\
q_5 = \beta; \\
q_6 = \arccos\left(\dfrac{-yd - L_2 \cdot \cos(\varphi) + y - \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)}{L_3} \right).
\end{cases}
$$

Численное моделирование: (нужно показать вот такие примеры на матлабе, примерно такие картинки-или анимацию что-то такое)

Проведем численное моделирование решения задачи о положениях. Используем следующие геометрические размеры механизма (Рис. 3.2):

$$L_1 = 300 \text{ мм}; \; L_2 = 330 \text{ мм}; \; L_3 = 330 \text{ мм}; \; L_4 = 270 \text{ мм}.$$

Размеры подвижной рамы:

$$a = 400 \text{ мм}; \; b = 1100 \text{ мм}.$$

Координаты точек B и D соответственно:

$$\begin{cases} xb = 155\text{мм}; \\ yb = 550\text{мм}; \\ zb = 270\text{мм}. \end{cases} \begin{cases} xd = 155\text{мм}; \\ yd = -550\text{мм}; \\ zd = 270\text{мм}. \end{cases}$$

Приведем пример. Задаем положение выходного звена и углы его ориентации, углы α и β вместе с координатами точки A_0:

$$\alpha = 0°; \beta = 0°; x = 0\text{мм}; y = 0\text{мм}; z = 400\text{мм}.$$

В результате численного моделирования расчета положений механизма параллельно-последовательной структуры с пятью степенями свободы разными подходами, получим значение углов и положений в обобщенных координатах:

$$q_1 = 0\text{мм}; q_2 \approx 40°39'; q_2' \approx 139°21'; q_3 \approx 139°21';$$
$$q_3' \approx 40°39'; q_4 \approx 40°39'; q_4' \approx 139°21'; q_5 = 0°.$$

Для проверки полученных результатов, была создана компьютерная модель представленного механизма. Построенная модель полностью подтвердила верность произведенных расчетов (Рис. 3.3).

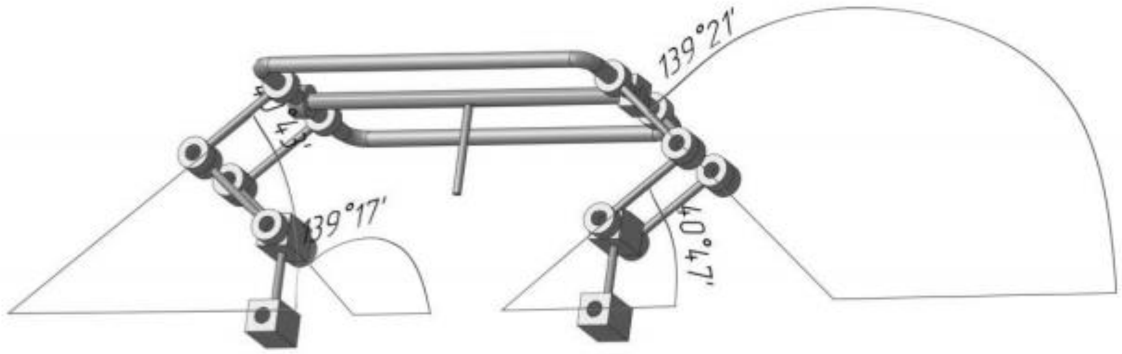


Рис. 3.3

Зададим другое положение выходного звена и углы его ориентации в пространстве:

$$\alpha = 0°; \beta = 30°; x = 0\text{мм}; y = 0\text{мм}; z = 400\text{мм}.$$

В результате численного моделирования расчета положений механизма параллельно-последовательной структуры с пятью степенями свободы, для обеих методик решений (3.8, 3.9) получим значение углов и положений в обобщенных координатах:

$$q_1 = 150\text{мм}; q_2 \approx 36°12'; q_2' \approx 143°94'; q_3 \approx 143°94';$$
$$q_3' \approx 36°12'; q_4 \approx 36°12'; q_4' \approx 143°94'; q_5 = 30°.$$

Проведена проверка с использованием компьютерной модели представленного механизма с заданными исходными условиями (Рис. 3.4). Построенная модель подтвердила верность произведенных расчетов.

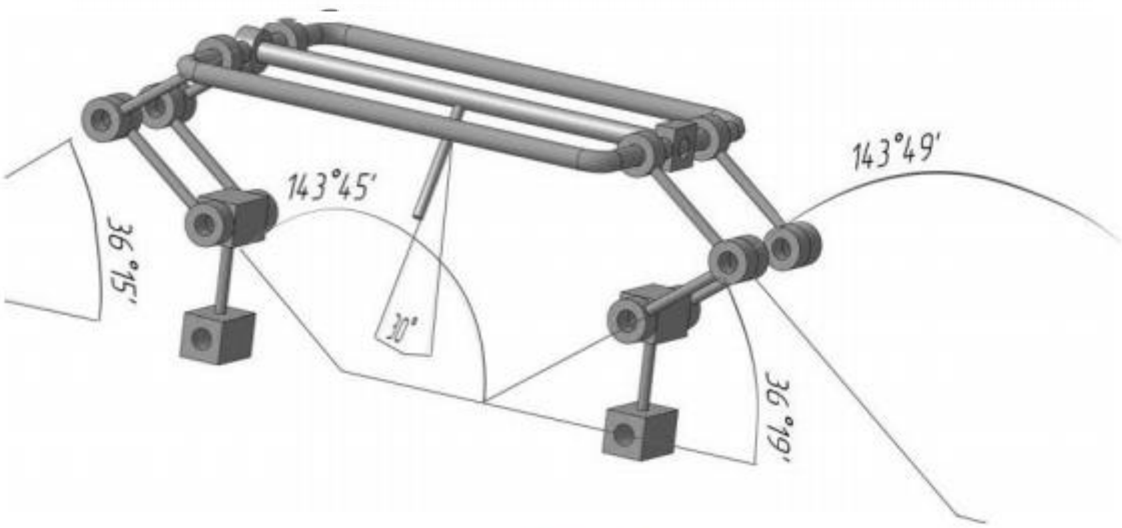


Рис. 3.4

Рассмотрим еще один пример. Зададим положение выходного звена и углы его ориентации в пространстве:

$$\alpha = 15°13; \beta = 25°20; x = 0\text{мм}; y = 0\text{мм}; z = 400\text{мм}.$$

Проведя численное моделирования, получим значение углов и положений в приводах:

$$q_1 = 0\text{мм}; q_2 \approx 65°01'; q_2{}' \approx 134°08'; q_3 \approx 134°08';$$
$$q_3{}' \approx 65°01'; q_4 \approx -34°22'; q_4{}' \approx 169°22'; q_5 = 25°20'.$$

Построенная компьютерная модель представленного механизма с заданными исходными данными приведена на Рис. 3.5.

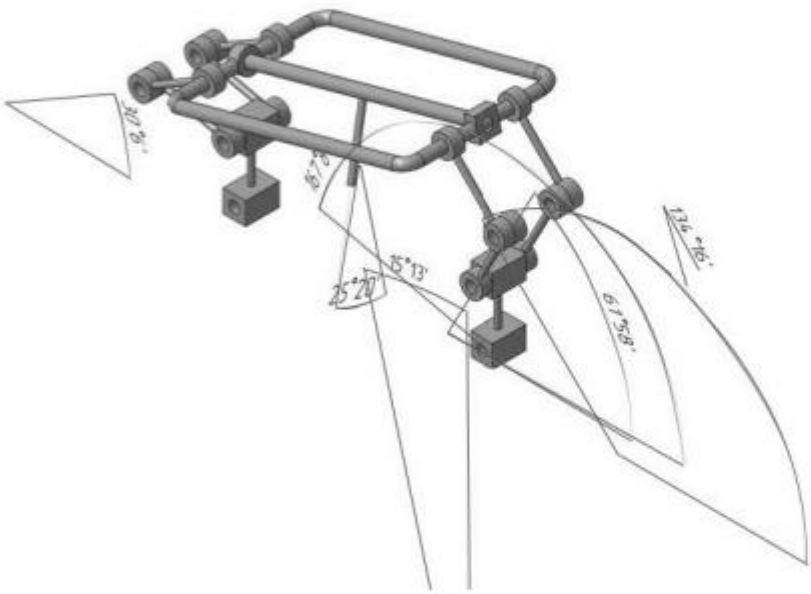


Рис. 3.5