Задача о скоростях

Для решения задачи о скоростях используем метод Д. Анджелеса и К. Гослена. Суть метода заключается в дифференцировании уравнений связей. Составляем указанные уравнения связей в неявном виде, производим дифференцирование, в результате получаем зависимость между обобщенными скоростями в приводах и абсолютными скоростями выходного звена:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{V} = (-\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{3.10}$$

где **A** – матрица частных производных от неявных функций по α, β, x, y, z:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta} & \frac{\partial F_4}{\partial x} & \frac{\partial F_4}{\partial y} & \frac{\partial F_4}{\partial z} \\ \frac{\delta F_5}{\delta \alpha} & \frac{\delta F_5}{\delta \beta} & \frac{\partial F_5}{\partial x} & \frac{\partial F_5}{\partial y} & \frac{\partial F_5}{\partial z} \end{pmatrix};$$

B – матрица частных производных от неявных функций по q_i:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_4}{\partial q_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial q_5} \end{pmatrix};$$

V – абсолютные скорости центра выходного звена:

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{\omega}$ – обобщенные скорости:

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\\ \dot{q}_4\\ \dot{q}_5\end{pmatrix}.$$

С учетом изложенного, уравнение (3.10), содержащее матрицы Анджелеса-Гослена и связывающее обобщенные скорости в приводах с абсолютными скоростями выходного звена, принимает вид:

Анджелеса-Гослена и связывающее обобщенные скорости в приводах с абсолютными скоростями выходного звена, принимает вид:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial\beta} & \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial\alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial\beta} & \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_3}{\partial\alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial\beta} & \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z}\\ \frac{\partial F_4}{\partial\alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial\beta} & \frac{\partial F_4}{\partial x} & \frac{\partial F_4}{\partial y} & \frac{\partial F_4}{\partial z}\\ \frac{\delta F_5}{\delta\alpha} & \frac{\delta F_5}{\delta\beta} & \frac{\partial F_5}{\partial x} & \frac{\partial F_5}{\partial y} & \frac{\partial F_5}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\\ \dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_4}{\partial q_4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial q_5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\\ \dot{q}_4\\ \dot{q}_5\end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Для составления функций в неявном виде, используем систему (3.8)

$$\begin{cases}F_1=x+L_1\cdot\sin(\beta)-q_1;\\ F_2=\cos(\theta\pm\gamma)-\cos q_2;\\ F_3=\dfrac{-yb-L_2\cdot\cos(\delta)+y+\dfrac{b\cdot\cos(\alpha)}{2}-L_1\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)}{L_3}-\cos q_3;\\ F_4=\cos(\eta\pm\kappa)-\cos q_4;\\ F_5=\beta-q_5.\end{cases}$$

Таким образом, учитывая проведенные выше преобразования, система неявных функций принимает вид:

$$
\begin{cases}
F_1 = x + L_1 \cdot \sin(\beta) - q_1; \\
F_2 = \left(A_{2cxy} - yb\right) \cdot \left(\left(A_{2cxz} - zb\right)^2 + \left(A_{2cxy} - yb\right)^2 + L_2{}^2 - L_3{}^2\right) + \left(A_{2cxz} - zb\right) \cdot \\
\cdot \sqrt{4 \cdot L_2{}^2 \cdot \left(\left(A_{2cxz} - zb\right)^2 + \left(A_{2cxy} - yb\right)^2\right) - \left(\left(A_{2cxz} - zb\right)^2 + \left(A_{2cxy} - yb\right)^2 + L_2{}^2 - L_3{}^2\right)^2} - \\
-2 \cdot \cos q_2 \cdot L_2 \cdot \left(\left(A_{2cxz} - zb\right)^2 + \left(A_{2cxy} - yb\right)^2\right); \\
F_3 = \begin{pmatrix} \left(A_{2cxy} - yb\right) \cdot \left(\left(A_{2cxz} - zb\right)^2 + \left(A_{2cxy} - yb\right)^2 + L_2{}^2 - L_3{}^2\right) + \left(A_{2cxz} - zb\right) \cdot \\ \cdot \sqrt{4 \cdot L_2{}^2 \cdot \left(\left(A_{2cxz} - zb\right)^2 + \left(A_{2cxy} - yb\right)^2\right) - \left(\left(A_{2cxz} - zb\right)^2 + \left(A_{2cxy} - yb\right)^2 + L_2{}^2 - L_3{}^2\right)^2} \end{pmatrix} - \\
-2 \cdot \left(-yb + y + \dfrac{b \cdot \cos(\alpha)}{2} - L_1 \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) - \cos q_3 \cdot L_3\right) \cdot \left(\left(A_{2cxz} - zb\right)^2 + \left(A_{2cxy} - yb\right)^2\right); \\
F_4 = \left(A_{3cxy} - yd\right) \cdot \left(\left(A_{3cxz} - zd\right)^2 + \left(A_{3cxy} - yd\right)^2 + L_2{}^2 - L_3{}^2\right) + \left(A_{3cxz} - zd\right) \cdot \\
\cdot \sqrt{4 \cdot L_2{}^2 \cdot \left(\left(A_{3cxz} - zd\right)^2 + \left(A_{3cxy} - yd\right)^2\right) - \left(\left(A_{3cxz} - zd\right)^2 + \left(A_{3cxy} - yd\right)^2 + L_2{}^2 - L_3{}^2\right)^2} - \\
-2 \cdot \cos q_4 \cdot L_2 \cdot \left(\left(A_{3cxz} - zd\right)^2 + \left(A_{3cxy} - yd\right)^2\right); \\
F_5 = \beta - q_5.
\end{cases}
\tag{3.15}
$$

Приведем некоторые расчеты частных производные от неявных функций по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = 0; \ \frac{\partial F_1}{\partial \beta} = L_1 \cdot \cos(\beta); \ \frac{\partial F_1}{\partial x} = 1; \ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0; \ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0;$$

Численное моделирование:

Проведем численное моделирование решения обратной задачи о скоростях, зададим геометрические размеры механизма. Размеры звеньев механизма (Рис. 3.2):

$$L_1 = 10 \text{ см}; \ L_2 = 10 \text{ см}; \ L_3 = 10 \text{ см}; \ L_4 = 10 \text{ см}.$$

Размеры подвижной рамы:

$$a = 10 \text{ см}; \ b = 30 \text{ см}.$$

Координаты точек B и D соответственно:

$$\begin{cases} xb = 4\text{см}; \\ yb = 15\text{см}; \\ zb = 10\text{см}. \end{cases} \begin{cases} xd = 4\text{см}; \\ yd = -15\text{см}; \\ zd = 10\text{см}. \end{cases}$$

Зададим положение выходного звена и углы его ориентации в пространстве. Пример 1.

$$\alpha = 11,5°; \beta = 30°; x = 0\text{см}; y = 0\text{см}; z = 10\text{см}.$$

В результате численного моделирования расчета положений механизма параллельно-последовательной структуры с пятью степенями свободы разными подходами, получим значение углов и положений в обобщенных координатах:

$$q_1 \approx 5\text{см}; q_2 \approx 45°35'; q_2' \approx 154°23'; q_3 \approx 154°23';$$
$$q_3' \approx 45°35'; q_4 \approx -30°59'; q_4' \approx 177°57'; q_5 = 30°.$$

Рассчитываем матрицу Анджелеса-Гослена для абсолютных координат:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ \frac{\partial F_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_4}{\partial \beta} & \frac{\partial F_4}{\partial x} & \frac{\partial F_4}{\partial y} & \frac{\partial F_4}{\partial z} \\ \frac{\delta F_5}{\delta \alpha} & \frac{\delta F_5}{\delta \beta} & \frac{\partial F_5}{\partial x} & \frac{\partial F_5}{\partial y} & \frac{\partial F_5}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8,658 & 1 & 0 & 0 \\ -3,263 \cdot 10^3 & 616,934 & 0 & 184,451 & -88,419 \\ -154,509 & 347,472 & 0 & -86,628 & -88,419 \\ -300,276 & 71,354 & 0 & 61,036 & -2,178 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для обобщенных координат:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial F_3}{\partial q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial F_4}{\partial q_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial F_5}{\partial q_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}936\cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}172\cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -332{,}948 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Зададим вектор абсолютных скоростей:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\text{рад} \\ 1\text{рад} \\ 1\text{см} \\ 1\text{см} \\ 1\text{см} \end{pmatrix}.$$

Подставим рассчитанные матрицы и вектор абсолютных скоростей в (3.11):

$$\begin{pmatrix} 0 & 8{,}658 & 1 & 0 & 0 \\ -3{,}263\cdot 10^3 & 616{,}934 & 0 & 184{,}451 & -88{,}419 \\ -154{,}509 & 347{,}472 & 0 & -86{,}628 & -88{,}419 \\ -300{,}276 & 71{,}354 & 0 & 61{,}036 & -2{,}178 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}936\cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}172\cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -332{,}948 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая вышеизложенное, рассчитаем обобщенные скорости:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}658 \\ 1{,}317 \\ 0{,}015 \\ -0{,}511 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем решение задачи о скоростях плоского частичного механизма параллельной структуры. (Рис. 3.6).

Для составления функций в неявном виде, используем систему (3.9):

$$
\begin{cases}
F_1 = \left(B_{1x} - \left(x - L_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha)\right)\right)^2 + \left(\left(y + L_0 \cdot \cos(\alpha) + \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha)\right) - B_{1y}\right)^2 - (L_1 + q_1)^2; \\
F_2 = \left(B_{2x} - \left(x - L_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha)\right)\right)^2 + \left(\left(y + L_0 \cdot \cos(\alpha) + \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha)\right) - B_{2y}\right)^2 - (L_2 + q_2)^2; \\
F_3 = \left(B_{3x} - \left(x - L_0 \cdot \sin(\alpha) - \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha)\right)\right)^2 + \left(\left(y + L_0 \cdot \cos(\alpha) - \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha)\right) - B_{3y}\right)^2 - (L_3 + q_3)^2; \\
F_4 = \left(B_{4x} - \left(x - L_0 \cdot \sin(\alpha) - \frac{a}{2} \cdot \cos(\alpha)\right)\right)^2 + \left(\left(y + L_0 \cdot \cos(\alpha) - \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha)\right) - B_{4y}\right)^2 - (L_4 + q_4)^2.
\end{cases} \tag{3.16}
$$

Вычисляя частные производные от неявных функций по обобщенным координатам, получим:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x - 2L_0 \cdot \sin(\alpha) + a \cdot \cos(\alpha) - 2B_{1x}; \; \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y + 2L_0 \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \sin(\alpha) - 2B_{1y};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = -2 \cdot \left(L_0 \cdot \cos(\alpha) + \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{2}\right) \cdot \left(x - L_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{a \cdot \cos(\alpha)}{2} - B_{1x}\right) -$$
$$-2 \cdot \left(L_0 \cdot \sin(\alpha) - \frac{a \cdot \cos(\alpha)}{2}\right) \cdot \left(y + L_0 \cdot \cos(\alpha) + \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{2} - B_{1y}\right);$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x - 2L_0 \cdot \sin(\alpha) + a \cdot \cos(\alpha) - 2B_{2x}; \; \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y + 2L_0 \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \sin(\alpha) - 2B_{2y};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = -2 \cdot \left(L_0 \cdot \cos(\alpha) + \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{2}\right) \cdot \left(x - L_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{a \cdot \cos(\alpha)}{2} - B_{2x}\right) -$$
$$-2 \cdot \left(L_0 \cdot \sin(\alpha) - \frac{a \cdot \cos(\alpha)}{2}\right) \cdot \left(y + L_0 \cdot \cos(\alpha) + \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{2} - B_{2y}\right);$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 2x - 2L_0 \cdot \sin(\alpha) - a \cdot \cos(\alpha) - 2B_{3x}; \; \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2y + 2L_0 \cdot \cos(\alpha) - a \cdot \sin(\alpha) - 2B_{3y};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} = 2 \cdot \left(L_0 \cdot \cos(\alpha) - \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{2}\right) \cdot \left(-x + L_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{a \cdot \cos(\alpha)}{2} + B_{3x}\right) -$$
$$-2 \cdot \left(L_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{a \cdot \cos(\alpha)}{2}\right) \cdot \left(y + L_0 \cdot \cos(\alpha) - \frac{a \cdot \sin(\alpha)}{2} - B_{3y}\right);$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial x} = 2x - 2L_0 \cdot \sin(\alpha) - a \cdot \cos(\alpha) - 2B_{4x}; \; \frac{\partial F_4}{\partial y} = 2y + 2L_0 \cdot \cos(\alpha) - a \cdot \sin(\alpha) - 2B_{4y};$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial \alpha}=2\cdot\left(L_0\cdot\cos(\alpha)-\frac{a\cdot\sin(\alpha)}{2}\right)\cdot\left(-x+L_0\cdot\sin(\alpha)+\frac{a\cdot\cos(\alpha)}{2}+B_{4x}\right)-$$
$$-2\cdot\left(L_0\cdot\sin(\alpha)+\frac{a\cdot\cos(\alpha)}{2}\right)\cdot\left(y+L_0\cdot\cos(\alpha)-\frac{a\cdot\sin(\alpha)}{2}-B_{4y}\right);$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1}=-2q_1-2L_1;\ \frac{\partial F_2}{\partial q_2}=-2q_2-2L_2;\ \frac{\partial F_3}{\partial q_3}=-2q_3-2L_3;\ \frac{\partial F_4}{\partial q_4}=-2q_4-2L_4.$$

Приведем пример решения задачи скоростей при следующих параметрах:

$$B_{1x}=10\text{см}; B_{2x}=5\text{см}; B_{3x}=-5\text{см}; B_{4x}=-10\text{см}; B_{1y}=B_{2y}=B_{3y}=B_{4y}=0\text{см};$$
$$L_1=L_2=L_3=L_4=5\text{см}; L_0=1; a=10\text{см};$$
$$x=-2\text{см}; y=2\text{см}; \alpha=-5°;$$
$$q_1=2{,}892\text{см}; q_2=-0{,}973\text{см}; q_3=-1{,}709\text{см}; q_4=-1{,}107\text{см}.$$

Зададим компоненты скорости выходного звена в абсолютной системе координат:

$$\dot{x}=1\text{см}; \dot{y}=1\text{см}; \dot{\alpha}=1\text{рад};$$

тогда значение скоростей в приводах принимают значения:

$$\dot{q}_1=2{,}952\ \text{см/с};\ \dot{q}_2=5{,}249\ \text{см/с};\ \dot{q}_3=-2{,}345\ \text{см/с},\ \dot{q}_4=-2{,}216\ \text{см/с}.$$

Для решения прямой задачи зададим скорости движения в приводах:

$$\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\\ \dot{q}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\text{см/с}\\ 1\text{см/с}\\ 1\text{см/с}\\ 1\text{см/с}\end{pmatrix}.$$

Проведя вычисления, найдем скорости выходного звена в абсолютной системе координат:

$$\dot{x}=0{,}849\ \text{см/с};\ \dot{y}=0{,}957\ \text{см/с};\ \dot{\alpha}=0{,}53\ \text{рад/с}.$$