

Задача динамики:

Для решения задачи динамики рассмотрим частичный механизм параллельной структуры, показанный на Рис. 3.7, отличающийся от механизма, рассмотренного выше (Рис. 3.6), отсутствием одной кинематической цепи и рабочего органа 3'. Таким образом, можно использовать расчеты, произведенные ранее, с учетом $L_0 = 0$.

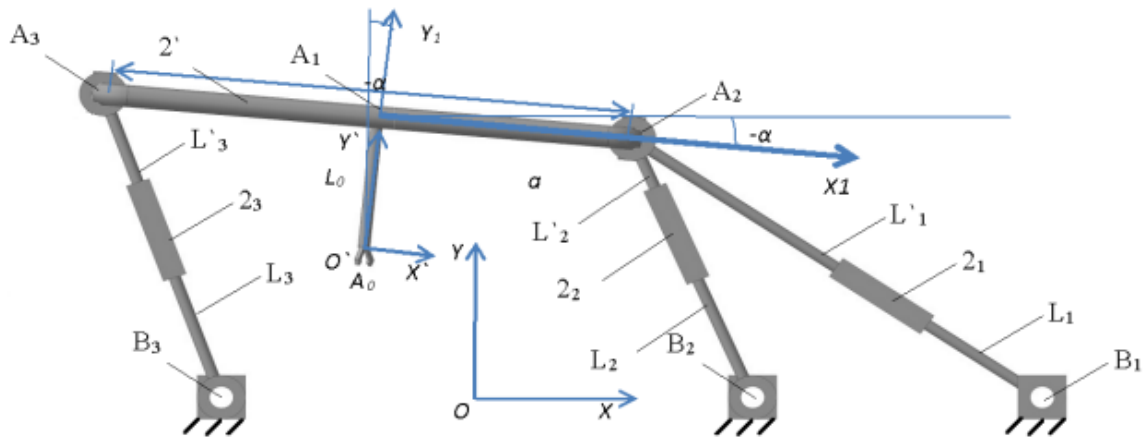


Рис. 3.7

Составим матрицы Анджелеса-Гослена, связывающих обобщенные скорости в приводах с абсолютными скоростями точки A_1 механизма:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

где $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$ - абсолютные скорости точки A_1 механизма; $\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$ - обобщенные

скорости в приводах; F_i - рассчитываются из уравнений связей; x, y, α - абсолютные координаты точки A_1 механизма; q_i - обобщенные координаты в приводах.

Вычисление частных производные от неявных функций по обобщенным координатам аналогично произведенным выше расчетам. Зададим параметры механизма и обобщенные координаты:

$$\begin{aligned} B_{1x} &= 10\text{см}; B_{2x} = 5\text{см}; B_{3x} = -5\text{см}; B_{4x} = -10\text{см}; B_{1y} = B_{2y} = B_{3y} = B_{4y} = 0\text{см}; \\ L_1 &= L_2 = L_3 = L_4 = 5\text{см}; L_0 = 1; a = 10\text{см}; \\ x &= -2\text{см}; y = 2\text{см}; \alpha = -5^\circ; \\ q_1 &= 2,892\text{см}; q_2 = -0,973\text{см}; q_3 = -1,709\text{см}; q_4 = -1,107\text{см}. \end{aligned}$$

Рассчитаем матрицы **A** и **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -14,038 & 4,872 & 30,383 \\ -4,038 & 4,872 & 26,025 \\ -3,962 & 3,128 & -17,309 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -15,784 & 0 & 0 \\ 0 & -8,054 & 0 \\ 0 & 0 & -9,658 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения элементов матрицы **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \\ A3 & B3 & C3 \end{pmatrix},$$

получим обратную ей матрицу:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} \end{pmatrix},$$

и выразим элементы обратной матрицы \mathbf{A}^{-1} через элементы матрицы \mathbf{A} :

$$A_{11} = \frac{B_2 \cdot C_2 - B_3 \cdot C_2}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1};$$

$$B_{11} = \frac{B_1 \cdot C_3 - B_3 \cdot C_1}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1};$$

$$C_{11} = \frac{B_1 \cdot C_2 - B_2 \cdot C_1}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1};$$

$$A_{22} = \frac{A_2 \cdot C_3 - A_3 \cdot C_2}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1};$$

$$B_{22} = \frac{A_1 \cdot C_3 - A_3 \cdot C_1}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1};$$

$$C_{22} = \frac{A_1 \cdot C_2 - A_2 \cdot C_1}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1};$$

...

$$A_{33} = \frac{A_2 \cdot B_3 - A_3 \cdot B_2}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1};$$

$$B_{33} = \frac{A_1 \cdot B_3 - A_3 \cdot B_1}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1};$$

$$C_{33} = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - A_2 \cdot B_1 \cdot C_3 + A_2 \cdot B_3 \cdot C_1 + A_3 \cdot B_1 \cdot C_2 - A_3 \cdot B_2 \cdot C_1}.$$

Умножим левую и правую части уравнения (3.17) на \mathbf{A}^{-1} :

$$(\mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A}) \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{A}^{-1}) \cdot (-\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\omega},$$

упростив уравнение, получаем зависимость:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} \\ A_{22} & B_{22} & C_{22} \\ A_{33} & B_{33} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим произведение матриц как матрицу Якоби \mathbf{J} с соответствующими элементами:

$$\mathbf{J} = - \begin{pmatrix} A11 & B11 & C11 \\ A22 & B22 & C22 \\ A33 & B33 & C33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A11 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & B11 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & C11 \cdot \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \\ A22 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & B22 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & C22 \cdot \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \\ A33 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & B33 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & C33 \cdot \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}.$$

Выразим абсолютные скорости выходного звена через обобщенные скорости:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -A11 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 - B11 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 - C11 \cdot \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3 = \\ &= -A11 \cdot (-2q_1 - 2L_1) \cdot \dot{q}_1 - B11 \cdot (-2q_2 - 2L_2) \cdot \dot{q}_2 - C11 \cdot (-2q_3 - 2L_3) \cdot \dot{q}_3; \\ \dot{y} &= -A22 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 - B22 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 - C22 \cdot \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3 = \\ &= -A22 \cdot (-2q_1 - 2L_1) \cdot \dot{q}_1 - B22 \cdot (-2q_2 - 2L_2) \cdot \dot{q}_2 - C22 \cdot (-2q_3 - 2L_3) \cdot \dot{q}_3; \\ \dot{\alpha} &= -A33 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 - B33 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 - C33 \cdot \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3 = \\ &= -A33 \cdot (-2q_1 - 2L_1) \cdot \dot{q}_1 - B33 \cdot (-2q_2 - 2L_2) \cdot \dot{q}_2 - C33 \cdot (-2q_3 - 2L_3) \cdot \dot{q}_3. \end{aligned}$$

Для осуществления численного моделирования движения рассматриваемого механизма составим уравнения Даламбера-Лагранжа. Уравнения движения механизма с тремя степенями свободы имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial x} = 0; \\ m\ddot{y} + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial y} - mg = 0; \\ J\ddot{\alpha} + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial \alpha} = 0, \end{cases}$$

где m - масса выходного звена;

\ddot{x}, \ddot{y} - ускорения центра масс;

$\ddot{\alpha}$ - угловое ускорение центра масс;

P_1, P_2, P_3 - силы в приводах;

M_1, M_2, M_3 - крутящие моменты в приводах, действующие на начальное звено;

J – момент инерции выходного звена;

$\delta x, \delta y, \delta \alpha$ - элементарные перемещения вдоль осей x, y и вокруг оси z соответственно;

$\frac{\partial q_i}{\partial x}$, $\frac{\partial q_i}{\partial y}$, $\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}$ - переменные коэффициенты, составленные из частных

производных, определяемые из уравнений скоростей;

g – ускорение свободного падения.

Тогда закон изменения ускорения, соответствующий колебательному движению второго порядка, принимает вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x); \\ \ddot{y} = \ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y); \\ \ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + \gamma_0 \cdot (\alpha_T - \alpha), \end{cases}$$

где $x_T(t)$, $y_T(t)$, $\alpha_T(t)$ - требуемые координаты; $x(t)$, $y(t)$, $\alpha(t)$ - фактические координаты; $\dot{x}_T(t)$, $\dot{y}_T(t)$, $\dot{\alpha}_T(t)$ - требуемые скорости; $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{\alpha}(t)$ -

фактические скорости; $\ddot{x}_T(t)$, $\ddot{y}_T(t)$, $\ddot{\alpha}_T(t)$ - требуемые ускорения; $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{\alpha}(t)$ - фактические ускорения.

При этом силы, действующие в приводах, рассчитываются по системе уравнений:

$$\begin{cases} P_1 = m\ddot{x}A11 + m\ddot{y}A22 + J\ddot{\alpha}A33; \\ P_2 = m\ddot{x}B11 + m\ddot{y}B22 + J\ddot{\alpha}B33; \\ P_3 = m\ddot{x}C11 + m\ddot{y}C22 + J\ddot{\alpha}C33, \end{cases}$$

где J - момент инерции выходного звена.

С учетом изложенного выше, система уравнений, описывающих силы, действующие в приводах, принимает вид:

$$\begin{cases} P_1 = m(\ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x))A11 + m(\ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y))A22 + \\ + J(\ddot{\alpha}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + \gamma_0 \cdot (\alpha_T - \alpha))A33; \\ P_2 = m(\ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x))B11 + m(\ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y))B22 + \\ + J(\ddot{\alpha}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + \gamma_0 \cdot (\alpha_T - \alpha))B33; \\ P_3 = m(\ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x))C11 + m(\ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y))C22 + \\ + J(\ddot{\alpha}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + \gamma_0 \cdot (\alpha_T - \alpha))C33. \end{cases}$$

Тогда ускорения центра масс с учетом ошибки \ddot{x}_p , \ddot{y}_p , $\ddot{\alpha}_p$, рассчитываются согласно уравнениям:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = \frac{P_1 \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x} + P_2 \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x} + P_3 \cdot \frac{\partial q_3}{\partial x}}{m}; \\ \ddot{y}_p = \frac{P_1 \cdot \frac{\partial q_1}{\partial y} + P_2 \cdot \frac{\partial q_2}{\partial y} + P_3 \cdot \frac{\partial q_3}{\partial y}}{m}; \\ \ddot{\alpha}_p = \frac{P_1 \cdot \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + P_2 \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + P_3 \cdot \frac{\partial q_3}{\partial \alpha}}{m}. \end{cases}$$

Зададим закон движения выходного звена:

$$\begin{cases} x_T(t) = 0; \\ y_T(t) = \frac{1}{2} \sin(\omega t) + \frac{3}{2}; \\ \alpha_T(t) = 0. \end{cases}$$

Задаем массу выходного звена 10 кг, частоту $\omega = 10$ рад/с.

Проведем численное моделирование выполненных расчетов. Рассмотрим движение с обратной связью, в котором зададим коэффициент демпфирования $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а время переходного процесса $t = 0,05$ с. Тогда постоянная времени:

$$\tau = \frac{t \cdot \zeta}{3} = \frac{0,05 \cdot \sqrt{2}}{3} \approx 0,012 \text{ с.}$$

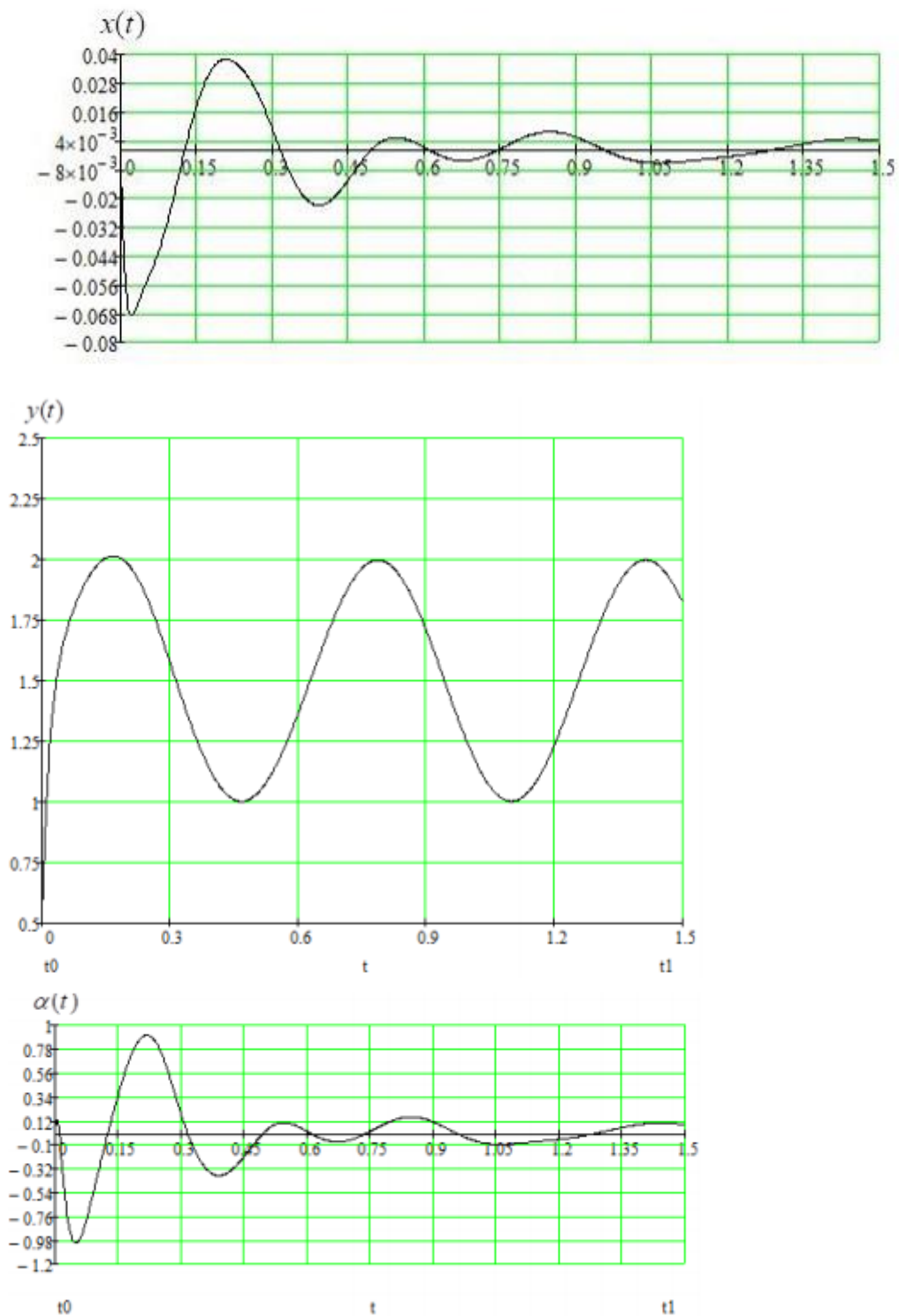
Рассчитаем коэффициенты обратной связи:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\sqrt{2}}{\tau} \approx 120; \\ \gamma_0 = \frac{1}{\tau^2} \approx 7,202 \cdot 10^3. \end{cases}$$

Без учета параметров двигателя и предельно допустимых значений обобщенных сил, закон изменения ускорения принимает вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{x}_T + 120 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + 7202 \cdot (x_T - x); \\ \ddot{y} = \ddot{y}_T + 120 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + 7202 \cdot (y_T - y); \\ \ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}_T + 120 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + 7202 \cdot (\alpha_T - \alpha). \end{cases}$$

В рассматриваемом движении с обратной связью получаем графики изменения координат центра масс $x(t)$, $y(t)$, $\alpha(t)$ (Рис. 3.8):



В рассматриваемом движении с обратной связью получаем графики изменения скоростей центра масс $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{\alpha}(t)$ (Рис. 3.9):

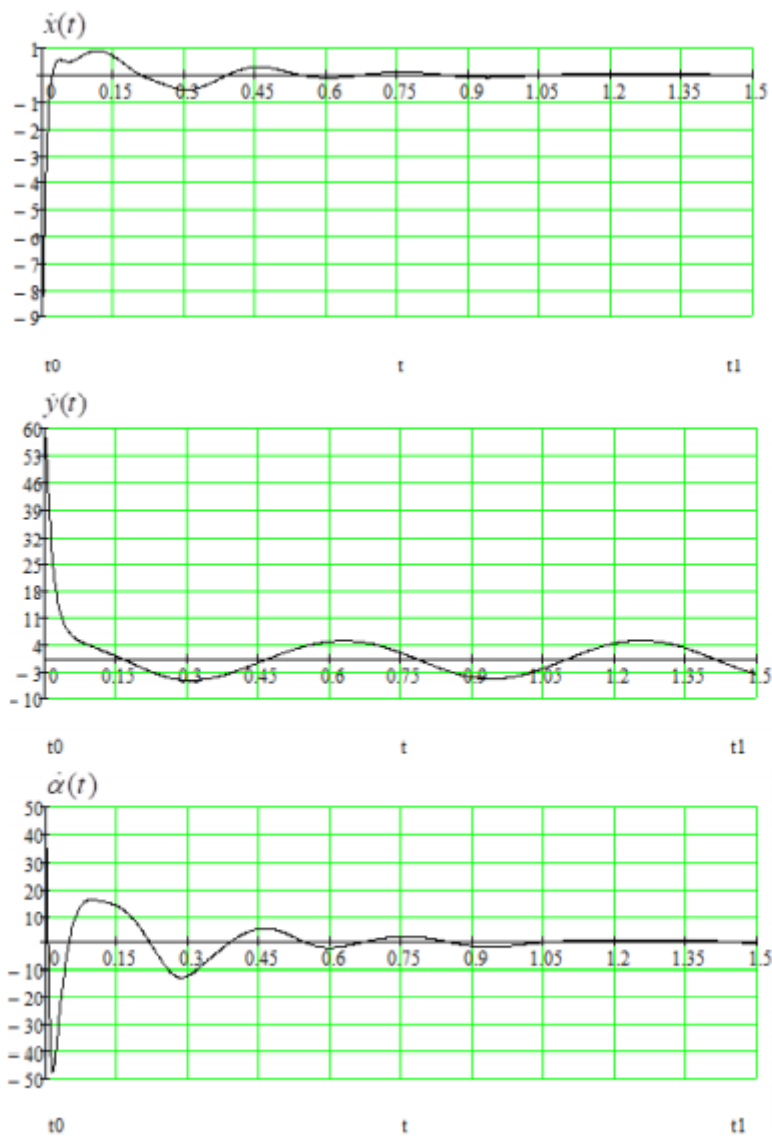


Рис. 3.9