МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. И. Перов, И. Д. Коструб

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ НОРМА ЛОЗИНСКОГО И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

УДК 517.984
ББК 22.161
П27

Р е ц е н з е н т –
д-р физ.-мат. наук, проф. *М. И. Каменский*

Перов А. И.

П27 Логарифмическая норма Лозинского и смежные вопросы : учебное пособие / А. И. Перов, И. Д. Коструб – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. – 114 с.

ISBN 978-5-9273-22-99-2

В учебном пособии рассматриваются вопросы применения логарифмической нормы С. М. Лозинского в различных задачах. Издание подготовлено на кафедре нелинейных колебаний факультета ПММ Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов дневного отделения, бакалавров, магистров, обучающихся по направлению 01.04.02 – Прикладная математика и информатика.

УДК 517.984
ББК 22.161

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16–01–00197.

ISBN 978-5-9273-22-99-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Логарифмической норме матрицы явно не повезло: упоминания о ней нет не только в учебниках по теории матриц и линейной алгебре, дифференциальным уравнениям и методам вычислений, но и в математических справочниках и даже в математической энциклопедии, в то время как она играет важную роль в различных вопросах локализации собственных значений матриц, асимптотического поведения и устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, а также в оценках погрешностей численного интегрирования дифференциальных уравнений. Первые результаты в этом направлении были получены А. Винтнером в 1946 году [12] и Т. Важевским в 1948 году [11]. Они оба получили оценки решений линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в терминах евклидовой метрики.

Логарифмическая норма матрицы практически одновременно была введена ленинградским математиком С. М. Лозинским [26] и шведским математиком Г. Далквистом [16] в 1958 году в их работах по численному интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Термин «логарифмическая норма» предложил С. М. Лозинский, а обозначение заимствовано после из книги «Теория показателей Ляпунова и её приложения к теории устойчивости» [10, с. 461].

Для линейных ограниченных операторов в банаховых пространствах аналогичные понятия были предложены Ю. Л. Далецким и М. Г. Крейном в 1970 году в их книге «Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах» [15, гл. 1]. А. И. Перовым и И. Д. Коструб в выступлении на международной научно-практической конференции в 2015 году [40] дано определение логарифмической нормы для линейных неограниченных операторов в банаховом пространстве.

В этом учебном пособии излагаются различные свойства логарифмической нормы матриц и рассказываются основные пути приложения этого понятия в указанных выше проблемах.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Вспомогательные сведения

§ 1. Неравенства Юнга и Гёльдера

Пусть $0 < \sigma < 1$. Тогда для любых положительных чисел a и b имеет место неравенство Юнга

$$a^{1-\sigma}b^{\sigma} \le (1-\sigma)a + \sigma b. \tag{1.1}$$

В написанном неравенстве знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

Если $a = b$, то $a^{1-\sigma}b^{\sigma} = a^{1-\sigma}a^{\sigma} = a^{1-\sigma+\sigma} = a^1 = a$; $(1-\sigma)a+\sigma b = (1-\sigma)a + \sigma a = (1-\sigma+\sigma)a = a$.

$\square$ На положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ рассмотрим логарифмическую функцию $\varphi(x) = \ln x$. Так как $\varphi'(x) = 1/x$ и $\varphi''(x) = -1/x^2 < 0$, то она строго вогнутая

$$(1-\sigma)\varphi(a) + \sigma\varphi(b) \le \varphi((1-\sigma)a + \sigma b). \tag{1.2}$$

Из формулы (1.2) вытекает, что

$$(1-\sigma)\ln a + \sigma \ln b \le \ln\left((1-\sigma)a + \sigma b\right).$$

Потенцируя последнее неравенство находим

$$a^{1-\sigma}b^{\sigma} \le (1-\sigma)a + \sigma b$$

и формула (1.1) установлена. При $0 < \sigma < 1$ знак равенства в последнем неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$. $\blacksquare$

Неравенство Юнга справедливо и в чуть более общих условиях $0 \le \sigma \le 1$ и $a \ge 0$, $b \ge 0$ (при этом нужно считать, что $a^0 = 1$, если $a \ne 0$, и $a^0 = 0$, если $a = 0$).

Пусть $0 < \sigma < 1$. Тогда при любых компонентах $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ имеет место неравенство Гёльдера

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\sigma}. \tag{1.3}$$

□ Сначала установим неравенство Гёльдера при дополнительных условиях

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma} = 1, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\sigma} = 1. \tag{1.4}$$

По неравенству Юнга (1.1) мы можем написать неравенство

$$|x_i||y_i| \leq (1-\sigma)|x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \sigma |y_i|^{\frac{1}{\sigma}},$$

суммируя которое находим

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq (1-\sigma)\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \sigma \sum_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{1}{\sigma}} = (1-\sigma) + \sigma = 1$$

в силу условия (1.4). В общем случае полагаем

$$\xi_i = \frac{x_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma}}, \quad \eta_i = \frac{y_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\sigma}}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1.5}$$

Последовательности $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ удовлетворяют условиям (1.4) и потому

$$\sum_{i=1}^{n} |\xi_i||\eta_i| \leq 1,$$

откуда вытекает, что

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i||y_i|}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |y_j|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\sigma}} \leq 1$$

и неравенство Гёльдера установлено.

При $0 < \sigma < 1$ знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$|x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}} = |y_i|^{\frac{1}{\sigma}}, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{1+\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\sigma} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{\sigma} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right). \quad \blacksquare$$

§ 2. Матрицы с преобладающей диагональю и теорема Адамара

Теорема 2.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с комплексными элементами, причём*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.1}$$

Тогда матрица A невырожденная.

Эта теорема связана с именем Адамара [13, с. 406–409]. В книге М. Маркуса и Х. Минка [29, с. 191–192] она приписывается Леви и Десплanту. Матрицы, обладающие свойством (2.1) называются матрицами с преобладающей диагональю (доминирующей диагональю).

$\square$ Предположим обратное: пусть матрица A – вырожденная, т. е. $\det A = 0$. Тогда существует такой вектор $x \in \mathbb{C}^n$, что $x \neq 0$ и $Ax = 0$ или подробнее

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.2}$$

Пусть $|x_k|$ – наибольший из модулей компонент $|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|$. Тогда так как

$$a_{kk}x_k = -\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j,$$

то

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}||x_j| \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}||x_k|,$$

откуда сокращая на $|x_k| > 0$, находим

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}|,$$

что противоречит условиям (2.1) при $i = k$. ■

В теореме 2.1 предполагалось преобладание диагональных элементов по строкам. Аналогичное утверждение имеет место и при преобладании диагональных элементов по столбцам.

Теорема 2.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с комплексными элементами, причём*

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ji}|, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.3}$$

Тогда матрица A невырожденная.

□ Рассмотрим матрицу $A^* = (\overline{a}_{ji})$. Для неё условие (2.3) даёт преобладание по строкам

$$|\overline{a}_{ii}| = |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ji}| = \sum_{j\neq i} |\overline{a}_{ij}|.$$

По теореме 2.1 матрица A^* – невырожденная, $\det A^* \neq 0$. Так как $\det A^* = \overline{\det A}$, то $\det A \neq 0$. ■

А. М. Островскому удалось признаки (2.1) и (2.3) сделать случаем некоей общей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть при некотором значении параметра* σ, $0 \leq \sigma \leq 1$ *выполнено условие*

$$|a_{ii}| > \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)^{1-\sigma} \left(\sum_{j\neq i} |a_{ji}|\right)^{\sigma}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.4}$$

Тогда матрица A *невырожденная.*

При $\sigma = 0$ выполнены условия теоремы 2.1, а при $\sigma = 1$ выполнены условия теоремы 2.2. Теорема А. М. Островского подтверждает наблюдение, высказанное в книге Г. Г. Харди, Д. Е. Литтвульда, Г. Полиа [48] о соединении условий по параметру.

□ Предположим обратное: пусть матрица A вырожденная, т. е. $\det A = 0$. Тогда существует такой вектор $x \in \mathbb{C}^n$, что $x \neq 0$ и $Ax = 0$, или подробнее

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Эту систему перепишем в виде

$$a_{ii} x_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Отсюда получаем

$$|a_{ii}||x_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| \leq$$

(и, применив искусственный приём)

$$\leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|^{1-\sigma} |a_{ij}|^{\sigma} |x_j| \leq$$

(теперь применим неравенство Гёльдера (1.3))

$$\leq \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)^{1-\sigma} \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{\sigma}}\right) = p_i^{1-\sigma} \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{\sigma}}\right).$$

Теперь используем условие (1.4); имеем

$$p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma} |x_i| \le p_i^{1-\sigma} \left(\sum_{j \ne i} |a_{ij}| |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\sigma}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.5}$$

Так как хотя бы одно $|x_i| > 0$, то хотя бы одно из неравенств, возведённое в степень $1/\sigma$, в (2.5) строгое. Сократив на $p_i^{1-\sigma} > 0$ и сложив все неравенства, находим

$$\sum_{i=1}^{n} q_i |x_i|^{\frac{1}{\sigma}} < \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i \ne j} |a_{ij}| \right) |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Мы получили противоречие. ■

Ольге Таусски-Тодд удалось избавиться от строгого неравенства в условиях (2.1), (2.3) и (2.4), потребовав неразложимости матрицы взамен. Утверждения теорем 2.1, 2.2 и 2.3 остаются в силе, если условия (2.1), (2.3) и (2.4) заменить нестрогими неравенствами, сохранив по крайней мере в одном из них строгое неравенство. Однако взамен нужно потребовать, чтобы матрица A была неразложимой.

Продемонстрируем это на примере теоремы 2.1. Пусть $|x_1| = |x_2| = ... = |x_p| > |x_j|$ при $j = p + 1, ..., n$.

$$|a_{ii}| |x_i| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}| |x_j| = |x_k| \sum_{j \ne i} |a_{ij}| + ..., \quad j = 1, 2, ..., p.$$

$$|a_{ij}| |x_j| < |a_{ij}| |x_k|, \quad \text{если } \ a_{ij} \ne 0$$

$$|a_{ii}| < p_i.$$

Поэтому $a_{ij} = 0$ при $i = 1, 2, ..., p$ и $j = p + 1, ..., n$, т. е. матрица A разложима.

§ 3. Локализационные теоремы Гершгорина и Островского.

Локализация собственных чисел матрицы

При работе с квадратными матрицами важно уметь решать как вопросы обратимости матриц (см. § 2), так и различные задачи, связанные с собственными числами матриц. Указанные проблемы составляют содержание вычислительных методов линейной алгебры [45]. Напомним, что о сложности задачи локализации собственных значений матрицы говорит тот факт, что при применении, скажем, критерия Рауса – Гурвица [18, с. 90] нужно знать прежде всего характеристическое уравнение матрицы

$$\det(\lambda I - A) \equiv \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \sigma_n = 0. \tag{3.1}$$

Собственные значения матрицы A обозначим $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$, ..., $\lambda_n(A)$; их совокупность определяет *спектр* sp A *матрицы* A.

Теорема 3.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с комплексными элементами. Тогда весь спектр матрицы A лежит в объединении n кругов*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq p_i \equiv \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.2}$$

Круги (3.2) называют *кругами Гершгорина, построенными по строкам матрицы* A. Мы видим, что элементы матрицы играют разную роль: диагональные элементы матрицы служат центрами кругов, а внедиагональные элементы позволяют определить их радиусы.

***Упражнение* 3.1.** *Обозначим круги* (3.2) *через* K_i, $i = 1, 2, ..., n$. *Возможно ли утверждать, что собственные значения матрицы* A *можно занумеровать так, чтобы* $\lambda_i(A) \in K_i$ *при* $i = 1, 2, ..., n$?

$\square$ Пусть λ – собственное значение матрицы A, т. е. λ – корень уравнения (3.1), $\det(\lambda I - A) = 0$. Матрица $\lambda I - A$ (*характеристическая матрица*) при данном значении λ не может удовлетворять условиям теоремы 2.1

$$|\lambda - a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

ибо тогда она была бы невырожденной. Поэтому хотя бы при одном i написанное неравенство НЕ выполнено, т. е. при этом выполнено неравенство (3.2). $\blacksquare$

Теорема 3.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с комплексными элементами. Тогда весь спектр матрицы A лежит в объединении n кругов*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq q_i \equiv \sum_{j \neq i} |a_{ji}|, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.3}$$

Круги (3.3) называют *кругами Гершгорина, построенными по столбцам матрицы A.*

Теорема 3.3. *Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с вещественными или комплексными элементами. Тогда при любом значении параметра σ, $0 \leq \sigma \leq 1$, весь спектр матрицы A лежит целиком в объединении n кругов*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i(\sigma) \equiv p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.4}$$

Круги (3.4) при $\sigma = 0$ и при $\sigma = 1$ совпадают с кругами Гершгорина (3.2) и (3.3), построенными по строкам и столбцам матрицы A соответственно; при $0 < \sigma < 1$ они называются (σ-*кругами*) *Островского.*

Подробное доказательство теорем 3.1–3.3 см. в книге М. Пароди [32, с. 56–71, 81–84].

Изучим зависимость i-го радиуса

$$r_i(\sigma) \equiv p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{3.5}$$

Мы видим, что либо $r_i(\sigma) \equiv 0$, если хотя бы одно из чисел p_i и q_i равно нулю, и $r_i(\sigma) > 0$ при $p_i > 0$ и $q_i > 0$. В последнем случае

$$r_i(\sigma) \equiv p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma} = p_i \left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{\sigma}, \quad r_i'(\sigma) = p_i \left(\frac{q_i}{p_i}\right)^{\sigma} \ln \frac{q_i}{p_i}.$$

Рассмотрим различные случаи:

$$\begin{array}{lll} q_i > p_i & r_i'(\sigma) > 0 & \ln r_i(\sigma) = (1-\sigma)\ln p_i + \sigma \ln q_i, \\ q_i = p_i & r_i'(\sigma) \equiv 0 & \text{логарифмически линейная функция}, \\ q_i < p_i & r_i'(\sigma) < 0 & r_i(0) = p_i, r_i(1) = q_i, r_i(\sigma) \geq \min\{p_i, q_i\}. \end{array} \tag{3.6}$$

***Упражнение* 3.2.** *Докажите или опровергните включение*

$$\operatorname{sp} A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(a_{ii}, r_i), \quad r_i = \min\{p_i, q_i\}. \tag{3.7}$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

Логарифмическая норма

§ 4. Спектральный радиус

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с комплексными элементами. Множество точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$, являющихся корнями характеристического уравнения матрицы A,

$$\det(\lambda I - A) \equiv \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \sigma_n = 0, \tag{4.1}$$

называется *спектром* матрицы A и обозначается sp A. Радиус наименьшего круга в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в нуле, содержащего весь спектр sp A матрицы A, называется *спектральным радиусом* матрицы A и обозначается spr A.

Пусть $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$, ..., $\lambda_n(A)$ – полный набор собственных значений матрицы A. По определению

$$\text{spr } A = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i(A)|. \tag{4.2}$$

Итак, спектральный радиус матрицы A – это вещественное неотрицательное число: $0 \le$ spr $A < +\infty$; оно может быть выписано в явном виде в исключительных случаях. Поэтому важную роль играют различные оценки спектрального радиуса.

Теорема 4.1. *Спектральный радиус обладает следующими свойствами:*

1) spr $A \ge 0$;

2) *если* spr $A = 0$, *то* A *– нильпотентная матрица* (*и наоборот*);

3) spr $(cA) = |c|$ spr A (c *– комплексное число*);

4) spr $(A + B) \le$ spr $A +$ spr B $(AB = BA)$;

5) spr $(AB) \le$ spr A spr B $(AB = BA)$.

***Упражнение* 4.1.** *Докажите теорему* 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с вещественными или комплексными элементами. Положим*

$$p_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \; q_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|. \tag{4.3}$$

Тогда справедливы наилучшие оценки для спектрального радиуса

$$\text{spr } A \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|a_{ii}| + p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}\} \leq \tag{4.4}$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}| + p_i)^{1-\sigma} (|a_{ii}| + q_i)^{\sigma} \leq \tag{4.5}$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{(1-\sigma)(|a_{ii}| + p_i) + \sigma(|a_{ii}| + q_i)\} =$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \{|a_{ii}| + (1-\sigma)p_i + \sigma q_i\}. \tag{4.6}$$

Иногда нужны и оценки снизу

$$\text{spr } A \geq \min_{1 \leq i \leq n} \{|a_{ii}| - p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}\} \;\; (>0) \tag{4.7}$$

$$\text{spr } A \geq \min_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}| - p_i)^{1-\sigma} (|a_{ii}| - q_i)^{\sigma} \;\; (>0) \tag{4.8}$$

$$\text{spr } A \geq \min_{1 \leq i \leq n} \{|a_{ii}| - (1-\sigma)p_i - \sigma q_i\} \;\; (>0). \tag{4.9}$$

При переходе использованы неравенства Юнга и Гёльдера из § 1. Если $|\lambda - a| \leq r$, то $|a| - r \leq |\lambda| \leq |a| + r$.

$$\square \;\; |\lambda| = |\lambda - a + a| \leq |\lambda - a| + |a| \leq r + |a| \equiv |a| + r.$$

$$|\lambda| = |\lambda - a + a| \geq |a| - |\lambda - a| \geq |a| - r. \;\; \blacksquare$$

Недостатки неравенств (4.7)–(4.9). Пусть $-a + p^{1-\sigma} q^{\sigma} < 0$.

$$-a + p^{1-\sigma} q^{\sigma} = (\mu - a + p^{1-\sigma} q^{\sigma}) - \mu = |\mu - a > 0| =$$

$$= \big((\mu - a)^{1-\sigma} (\mu - a)^{\sigma} + p^{1-\sigma} q^{\sigma}\big) - \mu \leq \text{неравенство Гёльдера (1.3)}$$

$$\leq (\mu - a + p)^{1-\sigma}(\mu - a + q)^{\sigma} - \mu \leq \text{неравенство Юнга (1.1)}$$
$$\leq (1-\sigma)(\mu - a + p) + \sigma(\mu - a + q) - \mu =$$
$$= (1-\sigma)(\mu - a) + (1-\sigma)p + \sigma(\mu - a) + \sigma q - \mu =$$
$$= (1-\sigma)(\mu - a) + \sigma(\mu - a) + (1-\sigma)p + \sigma q - \mu =$$
$$= \mu - a + (1-\sigma)p + \sigma q - \mu = -a + (1-\sigma)p + \sigma q.$$

§ 5. Норма матрицы

Облик конечномерного линейного анализа определяет понятие нормы. Мы начнём с нормы вектора. Числовая функция $||x|| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если выполнены следующие требования:

1) $||x|| \geq 0$ (неотрицательность);
2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (определённость);
3) $||cx|| = |c|||x||$ (абсолютная однородность);
4) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (неравенство треугольника).

Среди различных свойств нормы отметим *обратное неравенство треугольника*

$$||x \pm y|| \geq ||x|| - ||y||. \tag{5.1}$$

Выпишем наиболее употребительные векторные нормы.

$$||x||_0 = \max_i |x_i|, \tag{5.2}$$

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \tag{5.3}$$

$$||x||_{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.4}$$

Последняя норма называется евклидовой; она порождает скалярное произведение

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \tag{5.5}$$

так как $(x, x) = ||x||^2 \left(= ||x||^2_{\frac{1}{2}}\right)$.

Пусть $0 \le \sigma \le 1$. Положим

$$||x||_\sigma = \begin{cases} \max\limits_i |x_i|, & \text{если} \quad \sigma = 0; \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\sigma}, & \text{если} \quad 0 < \sigma \le 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

Мы видим, что при $\sigma = 0$, $\sigma = 1$ и $\sigma = 1/2$ норма (5.6) совпадает с нормами (5.2), (5.3) и (5.4) соответственно. Нормы (5.6) называются *гёльдеровыми.* Неравенство Гёльдера (1.3) записывается в более выразительным виде

$$|(x, y)| \le ||x||_{1-\sigma}||y||_\sigma, \;\; 0 \le \sigma \le 1. \tag{5.7}$$

[20]. Нетрудно видеть, что при фиксированном $x \in \mathbb{C}^n$ числовая функция $||x||_\sigma$ непрерывна по σ, причём $||x||_\sigma \to ||x||_0$ при $0 < \sigma \to 0$. Гёльдеровы нормы при различных значениях параметра связаны соотношением

$$||x||_\alpha \le n^{(\alpha-\gamma)+}||x||_\gamma, \;\; 0 \le \alpha, \gamma \le 1, \tag{5.8}$$

причём выписанные константы являются наилучшими. Здесь $u_+ = u$ при $u \ge 0$ и $u_+ = 0$ при $u < 0$ (неотрицательная часть числа).

***Упражнение* 5.1.** *Докажите обратное неравенство треугольника* (5.1).

***Упражнение* 5.2.** *Проверьте утверждение о непрерывности* $||x||_\sigma$ *по* σ.

***Упражнение* 5.3.** *Убедитесь в справедливости неравенства* (5.8), *включая утверждение о точности постоянной.*

Пусть $A = (a_{ij})$. Определим норму матрицы $||A||$ как операторную, положив

$$||A|| = \max_{x \ne 0} \frac{||Ax||}{||x||}. \tag{5.9}$$

Введённая таким образом норма матрицы обладает следующими свойствами:

1) $||A|| \geq 0$ (неотрицательность);
2) $||A|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (определённость);
3) $||cA|| = |c|||A||$ (абсолютная однородность);
4) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ (неравенство треугольника);
5) $||AB|| \leq ||A||||B||$;
6) $||I|| = \mathbf{1}$.

Первые четыре свойства 1)–4) говорят о том, что операторная норма является нормой в пространстве матриц.

Если векторная норма является гёльдеровой, то соответствующая матричная норма вычисляется как

$$||A||_\sigma = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\sigma}{||x||_\sigma}. \tag{5.10}$$

Приведём конкретные выражения для норм

$$||A||_0 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{5.11}$$

$$||A||_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{5.12}$$

$$||A||_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{spa } A^* A}. \tag{5.13}$$

§ 6. Спектральный радиус и норма матрицы

Материал этого параграфа основан на дальнейшем развитии материалов предыдущих параграфов § 3 и § 5. Прежде всего отметим важное неравенство

$$\text{spr } A \leq ||A||. \tag{6.1}$$

Так как в некоторых случаях нахождение нормы матрицы или её оценки не представляет труда, то формула (6.1) доставляет мощный способ оценки спектрального радиуса.

Выпишем неравенство

$$\rho^k \leq ||A^k|| \leq ||A||^k, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{6.2}$$

Теорема 6.1. *Пусть ρ – наилучшая константа в оценке* (6.2) *снизу. Тогда*

$$\rho = \inf_{k\geq 1} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}}. \tag{6.3*}$$

Оценка сверху в (6.2) почти очевидна:

$$||A^k|| = ||\underbrace{AA...A}_{k\text{ раз}}|| \leq ||A||||A||...||A|| = ||A||^k.$$

$\square$ Из (6.2) вытекает, что $\rho \leq ||A^k||^{\frac{1}{k}}$ при любом $k = 1, 2, ...$, откуда вытекает, что $\rho = \inf ||A^k||^{\frac{1}{k}}$ при $k = 1, 2, ...$. Так как, по предположению, ρ – наилучшая постоянная, то в соответствующей формуле оценки (6.3*) имеет место знак равенства.

Проверим формулу

$$\rho = \lim_{k\to\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}}, \tag{6.4}$$

которая известна как *формула Гельфанда.*

Положим $a_k = ||A^k||^{\frac{1}{k}}$, $k = 1, 2, ...$. Из (6.2) вытекает, что $(0 \leq)\ \rho \leq a_k \leq ||A||$. Пусть $\varepsilon > 0$ и номер $k(\varepsilon)$ выбран так, что $(0 \leq \rho) \leq a_{k(\varepsilon)} < \rho + \varepsilon$. Натуральное k запишем в виде $k = mk(\varepsilon) + \Delta$, $0 \leq \Delta < k(\varepsilon)$. Так как

$$A^k = A^{mk(\varepsilon)+\Delta} = A^{mk(\varepsilon)}A^{\Delta} = \left(A^{k(\varepsilon)}\right)^m A^{\Delta}, \text{ то}$$

$$||A^k|| = ||A^{mk(\varepsilon)+\Delta}|| = ||A^{mk(\varepsilon)}||||A^{\Delta}|| \leq ||A^{k(\varepsilon)}||^m ||A||^{\Delta},$$

откуда следует

$$||A^k||^{\frac{1}{k}} \leq ||A^{k(\varepsilon)}||^{\frac{m}{k}} ||A||^{\frac{\Delta}{k}} \leq ||A^{k(\varepsilon)}||^{\frac{1}{k(\varepsilon)}\frac{m}{m+\Delta}} \leq$$

$$\leq (\rho+\varepsilon)M^{\frac{1}{k}} < \rho + 2\varepsilon \ \text{ при } \ k > N(\varepsilon).$$

Поясним, что $(\rho+\varepsilon)\frac{mk(\varepsilon)}{mk(\varepsilon)+\Delta}M^{\frac{1}{k}}$, где $M = \max\left\{1, ||A||, ..., ||A||^{\Delta}\right\}$.

Цепочку (6.3*) нужно дополнить равенством

$$\rho = \inf_{k\geq 1} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i(A)|. \tag{6.3}$$

Последнее равенство в (6.3) говорит о том, что ρ является спектральным радиусом матрицы $A : \rho = \text{spr } A$.

Пусть $r = \text{spr } A$. Проверим, что $r = \rho$, т. е. докажем формулу (6.3). Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $Ax = \lambda x$, причём $|\lambda| = r$. Так как $A^k x = \lambda^k x$, то $|\lambda^k| ||x|| \leq ||A^k|| ||x||$, откуда сокращая на $||x|| > 0$, находим, $|\lambda^k| \leq ||A^k||$ и $|\lambda| = r \leq ||A^k||^{\frac{1}{k}}$, откуда в силу произвольности k получаем $r \leq \rho$.

Допустим на мгновение, что $r < \rho$. Положим $B = A/\rho$ ($\rho > 0$). Тогда $\text{spr } B = 1/\rho \text{ spr } A < 1$ в силу сделанного нами допущения. Так как $\text{spr } B < 1$, то $B^k \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны $B^k = A^k/\rho^k$ и согласно (6.2) $||B^k|| = ||A^k||/\rho^k \geq 1$. Полученное противоречие и означает неправомочность предположения о том, что $r < \rho$. ■

Теорема 6.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная квадратная $n\times n$-матрица и ρ её спектральный радиус $\rho = \text{spr } A$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую матричную норму $||A||_{(\varepsilon)}$, что

$$(0 \leq \rho) \ \leq ||A||_{(\varepsilon)} < \rho + \varepsilon. \tag{6.5}$$

□ Существует несколько доказательств этой теоремы. ■

В книге Э. Хилле и Р. Филлипс [49, с. 138, с. 695] мы нашли следующие свойства спектрального радиуса.

***Упражнение* 6.1.** *Спектральный радиус $r(A)$ матрицы A обладает следующими свойствами*

$$r(A^k) = (r(A))^k, \ \ r(\lambda A) = |\lambda| r(A), \ \ r(A) \leq ||A||.$$

Особенно важна последняя оценка.

В теории матриц доказывается важное равенство

$$\lim_{k\to\infty} ||A^k||^{\frac{1}{k}} = \rho. \tag{6.6}$$

Пользуясь этим равенством, можно в пространстве $\mathbb{C}^n$ построить норму $||x||_0$, эквивалентную первоначально заданной, в которой матрица A имеет норму

$$||A||_0 = \sup_{||x||_0 \le 1} ||Ax||_0,$$

не превосходящую $\rho_0 + \varepsilon_0$, где ε_0 – произвольное (заданное до построения новой нормы) положительное число.

Напомним, что норма $||x||_0$ называется эквивалентной норме $||x||$, если

$$m||x|| \le ||x||_0 \le M||x|| \ \ (x \in \mathbb{C}^n),$$

где m и M – фиксированные положительные числа.

Пусть задано $\varepsilon_0 > 0$. В силу (6.6) можно указать такое k_0, что

$$||A^{k_0}x|| \le (\rho_0 + \varepsilon_0)^{k_0}||x|| \ \ (x \in \mathbb{C}^n). \tag{6.7}$$

Положим

$$||x||_0 = ||x|| + \frac{||Ax||}{\rho_0 + \varepsilon_0} + ... + \frac{||A^{k_0-1}x||}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{k_0-1}} \ \ (x \in \mathbb{C}^n). \tag{6.8}$$

Аксиомы нормы для $||x||_0$ проверяются без труда; эквивалентность нормы (6.8) первоначальной норме следует из равенства

$$||x|| \le ||x||_0 \le \left(1 + \frac{||A||}{\rho_0 + \varepsilon_0} + ... + \frac{||A^{k_0-1}||}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{k_0-1}}\right)||x||. \tag{6.9}$$

Проверим неравенство

$$||A||_0 \le \rho_0 + \varepsilon_0. \tag{6.10}$$

□ Из (6.8) вытекает, что

$$||Ax||_0 = (\rho_0 + \varepsilon_0)||x||_0 + \frac{||A^{k_0-1}x||}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{k_0-1}} - (\rho_0 + \varepsilon_0)||x||,$$

$$||Ax||_0 = ||Ax|| + \frac{||A^2x||}{\rho_0 + \varepsilon_0} + ... + \frac{||A^{k_0-1}x||}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{k_0-1}} + \frac{||A^{k_0}x||}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{k_0-1}} =$$

$$= (\rho_0 + \varepsilon_0) \left\{ ||x|| + \frac{||Ax||}{\rho_0 + \varepsilon_0} + ... + \frac{||A^{k_0 - 1}x||}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{k_0 - 1}} \right\} -$$

$$-(\rho_0 + \varepsilon_0)||x|| + \frac{||A^{k_0}x||}{(\rho_0 + \varepsilon_0)^{k_0 - 1}},$$

откуда в силу (6.7) вытекает, что

$$||Ax||_0 \le (\rho_0 + \varepsilon_0)||x||_0 \;\; (x \in \mathbb{C}^n). \tag{6.11}$$

И неравенство установлено. ■

§ 7. Спектральная абсцисса

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с вещественными или комплексными элементами. Во многих вопросах важную роль играет характеристическое уравнения матрицы A и его корни

$$\det(\lambda I - A) \equiv \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \sigma_n = 0. \tag{7.1}$$

По аналогии со спектральным радиусом spr A матрицы A введём понятие *спектральной абсциссы* spa A как наименьшего числа α, для которого весь спектр матрицы A лежит в полуплоскости Re $\lambda \le \alpha$.

Пусть $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$, ..., $\lambda_n(A)$ – полный набор собственных значений матрицы A. По определению

$$\text{spa } A = \max_{1 \le i \le n} \text{Re } \lambda_i(A). \tag{7.2}$$

Итак, спектральная абсцисса матрицы A – это вещественное число произвольного знака: $-\infty \le$ spa $A < +\infty$.

Теорема 7.1. *Спектральная абсцисса обладает следующими свойствами:*

1) spa $(cA) = c$ spa (A), *если* $c \ge 0$,
spa $(cA) = -c$ spa $(-A)$, *если* $c < 0$;

2) spa $(A + B) \le$ spa $A +$ spa B, *если матрицы* A *и* B *перестановочны*;

3) $|\mathrm{spa}\, A| \le ||A||$;
4) $|\mathrm{spa}\, A - \mathrm{spa}\, B| \le ||A - B||$.

***Упражнение* 7.1.** *Докажите теорему* 7.1.

И сам термин «спектральная абсцисса», и обозначение предложены А. И. Перовым [35, с. 23]

Теорема 7.2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с вещественными или комплексными элементами. Положим*

$$p_i = \sum_{j \ne i} |a_{ij}|,\ q_i = \sum_{j \ne i} |a_{ji}|,\quad i = 1, 2, ..., n. \tag{7.3}$$

Тогда для спектральной абсциссы справедливы следующие оценки (сравни с оценками (4.4)–(4.9))

$$\mathrm{spa}\, A \le \max_{1 \le i \le n} \{\mathrm{Re}\, a_{ii} + p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}\} \le$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \{(\mathrm{Re}\, a_{ii} + \mu_i + p_i)^{1-\sigma} (\mathrm{Re}\, a_{ii} + \mu_i + q_i)^{\sigma} - \mu_i\} \le \tag{7.4}$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \{\mathrm{Re}\, a_{ii} + (1-\sigma) p_i + \sigma q_i\},$$

где μ_i выбрано так, чтобы $\mathrm{Re}\, a_{ii} + \mu_i > 0$. Иногда полезны и оценки снизу

$$\mathrm{spa}\, A \ge \min_{1 \le i \le n} \{\mathrm{Re}\, a_{ii} - p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}\} \ge$$

$$\ge \min_{1 \le i \le n} \{\mu_i - (\mu_i - \mathrm{Re}\, a_{ii} + p_i)^{1-\sigma} (\mu_i - \mathrm{Re}\, a_{ii} + q_i)^{\sigma}\} \ge \tag{7.5}$$

$$\ge \min_{1 \le i \le n} \{\mathrm{Re}\, a_{ii} - (1-\sigma) p_i - \sigma q_i\},$$

где μ_i выбрано так, чтобы $\mu_i - \mathrm{Re}\, a_{ii} > 0$.

□ Докажем оценки (7.5). Для упрощения записи положим $\lambda_i(A) = \lambda$, $\mathrm{Re}\, a_{ii} = a$, $p_i(A) = p$, $q_i(A) = q$.

Из оценки

$$|\lambda - a| \le r, \quad r = p^{1-\sigma} q^{\sigma} \tag{7.6}$$

выводим

$$\mathrm{Re}\, a - r \le \mathrm{Re}\, \lambda \le \mathrm{Re}\, a + r. \tag{7.7}$$

По теореме 3.3 получаем

$$\mathrm{Re}\, \lambda \le a + p^{1-\sigma} q^{\sigma} \le (a+\mu)^{1-\sigma}(a+\mu)^{\sigma} + p^{1-\sigma} q^{\sigma} - \mu \le$$

по неравенству Гёльдера (1.3)

$$\le (a+\mu+p)^{1-\sigma}(a+\mu+q)^{\sigma} - \mu \le$$

по неравенству Юнга (1.1)

$$\le (1-\sigma)(a+\mu+p) + \sigma(a+\mu+q) - \mu = a + (1-\sigma)p + \sigma q,$$

что непосредственно приводит к оценкам (7.4) (число μ выбрано так, чтобы $a + \mu > 0$). Аналогично получаем оценки снизу

$$\mathrm{Re}\, \lambda \ge a - p^{1-\sigma} q^{\sigma} = \mu - (\mu - a)^{1-\sigma}(\mu - a)^{\sigma} - p^{1-\sigma} q^{\sigma} \ge$$

по неравенству Гёльдера (1.3)

$$\ge \mu - (\mu - a + p)^{1-\sigma}(\mu - a + q)^{\sigma} \ge$$

по неравенству Юнга (1.1)

$$\ge \mu - (1-\sigma)(\mu - a + p) - \sigma(\mu - a + q) = a - (1-\sigma)p - \sigma q,$$

что непосредственно приводит к оценкам (7.5) (число μ выбрано так, чтобы $\mu - a > 0$). ■

§ 8. Дифференциал Гато нормы

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$, наделённое какой-либо нормой. Говорят, что функция (числовая) $\varphi(x) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема по*

Фреше в точке x, если её приращение может быть представлено в виде

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi'(x)h + \omega(x,h), \tag{8.1}$$

где $\varphi'(x)h$ – функционал от h, а остаток $\omega(x,h)$ удовлетворяет условию малости $|\omega(x,h)|/||h|| \to 0$ при $||h|| \to 0$.

Возьмём в качестве числовой функции норму элемента: $\varphi(x) = ||x||$. Эта функция никогда не дифференцируема в нуле, но может быть дифференцируема по Фреше во всех остальных точках. Так, например, обстоит дело, если норма порождается скалярным произведением $\varphi(x) = (x,x)^{1/2}$. В этом случае

$$\varphi'(x)h = \mathrm{Re}\,\frac{(x,h)}{||x||} \ \text{ при } \ x \neq 0. \tag{8.2}$$

Говорят, что числовая функция $\varphi(x) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема по Гато* в точке x, если

$$\frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} \to \varphi'(x)h \ \text{ при } \ 0 \neq t \to 0 \ \ (h \in \mathbb{C}^n). \tag{8.3}$$

Если (8.3) имеет место при $0 < t \to 0$, то говорят об одностороннем дифференциале Гато. Отметим, что произвольная норма всегда имеет односторонний дифференциал Гато

$$\lim_{0<t\to 0} \frac{||x+th|| - ||x||}{t} = [x,h]. \tag{8.4}$$

Проще всего в этом убедиться при $x = 0$. Тогда интересующее нас отношение имеет вид $||h||$ (независимо от t) и $[0,h] = ||h||$. Доказательство для произвольных $x \neq 0$ опирается на свойство векторной нормы

$$\varphi((1-t)x + ty) = ||(1-t)x + ty|| \leq \tag{8.5}$$

$$\leq (1-t)||x|| + t||y|| = (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) \ \text{ при } \ 0 \leq t \leq 1.$$

Теорема 8.1. *Произвольная норма всегда дифференцируема по Гато.*

□ Отметим, прежде всего, что при $0 < t$

$$\left|\frac{||x+th||-||x||}{t}\right| \le \frac{||x+th-x||}{t} = \frac{||th||}{t} = ||h||,$$

т. е. интересующее нас отношение ограничено.

Пусть $0 < s < t$. Проверим, что

$$\frac{||x+sh||-||x||}{s} \le \frac{||x+th-x||}{t} \le \frac{||x+th||-||x||}{t} = ||h||. \quad (8.6)$$

Действительно, так как

$$t(x+sh) - s(x+th) = (t-s)x,$$

то

$$(t-s)||x|| = ||t(x+sh) - s(x+th)|| \ge$$

$$\ge ||t(x+sh)|| + ||s(x+th)|| = t||x+sh|| - s||x+th||$$

откуда вытекает, что

$$t\{||x|| - ||x+sh||\} \ge s\{||x|| - ||x+th||\}$$

и

$$\frac{||x||-||x+sh||}{s} \ge \frac{||x||-||x+th||}{t}$$

и требуемое неравенство (8.6) установлено. Так как монотонно ограниченная функция имеет конечный предел, то существование предела в (8.4) установлено. ■

Теорема 8.2. *Дифференциал Гато* $[x, h]$ *обладает следующими свойствами:*

1) $[0, h] = ||h||, \ \ |[x, h]| \le ||h||$;
2) $[x, ch] = c[x, h]$ *при* $c \ge 0$,
   $[x, ch] = -c[x, -h]$ *при* $c < 0$;
3) $[x, h+h] \le [x, h] + [x, h]$ (*полуаддитивность*);
4) $[x, h] + [x, -h] \ge 0$.

□ Так как при $t > 0$ по обратному неравенству треугольника

$$| \, ||x + th|| - ||x|| \, | \leq ||x + th - x|| = t||h||,$$

$$\left| \frac{||x + th|| - ||x||}{t} \right| \leq ||h||,$$

откуда при $0 < t \to 0$ получаем свойство 1).

Далее, при $c = 0$ получаем $[x, 0] = 0$. Если $c > 0$, то

$$\frac{||x + t(ch)|| - ||x||}{t} = \frac{||x + (tc)h|| - ||x||}{tc} c,$$

откуда при $0 < ct \to 0$ получаем первое соотношение в 2). Если $C < 0$, то по уже доказанному

$$[x, ch] = [x, -c(-h)] = -c[x, -h]$$

и свойство 2) полностью доказано.

Для доказательства свойства полуаддитивности 3) предварительно докажем

$$x + t(h + k) = \frac{1}{2}(x + 2th) + \frac{1}{2}(x + 2tk),$$

откуда следует

$$\frac{||x + t(h + k)|| - ||x||}{t} = \frac{||x + (2t)h + x + (2t)k|| - 2||x||}{2t} \leq$$

$$\leq \frac{||x + (2t)h|| - ||x||}{2t} + \frac{||x + (2t)k|| - ||x||}{2t} \to [x, h] + [x, h]$$

при $0 < t \to 0$, и свойство 2) также установлено.

Так как в силу свойства полуаддитивности 3)

$$0 = [x, 0] = [x, h - h] \leq [x, h] + [x, -h],$$

то свойство 4) проверено. ■

См. книги Б. Ф. Былова и соавторов [10], Ю. Л. Далецкого, М. Г. Крейна [15, с. 93, упр. 17].

§ 9. Логарифмическая норма

Этот параграф – один из центральных. Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с вещественными или комплексными элементами. *Логарифмической нормой* матрицы A называется вещественное число, определяемое по правилу

$$||A||_{\log} = \lim_{0<t\to 0} \frac{||I + tA|| - ||I||}{t}. \tag{9.1}$$

(Напомним, что I – единичная матрица n-го порядка и $||I|| = 1$). Существование предела в (9.1) устанавливается с помощью таких же рассуждений, что и при доказательстве существования предела в (8.4). Такое определение логарифмической нормы предложено в статье российского математика С. М. Лозинского (Ленинград) [26]. Отметим, что аналогичное определение было дано также практически одновременно шведским математиком Г. Далквистом [16]. Обозначение логарифмической нормы $||A||_{\log}$ заимствовано нами из [10, с. 461].

Теорема 9.1. *Логарифмическая норма обладает следующими свойствами* (*сравни с* [15, с. 93, задача 19]):

1) $||cA||_{\log} = c||A||_{\log}$, *если* $c \geq 0$,
$||cA||_{\log} = -c|| - A||_{\log}$, *если* $c < 0$;
2) $||A + B||_{\log} \leq ||A||_{\log} + ||B||_{\log}$ (*полуаддитивность*);
3) $|\ ||A||_{\log}\ | \leq ||A||$;
4) $|\ ||A||_{\log} - ||B||_{\log}\ | \leq ||A - B||$;
5) $||A||_{\log} + || - A||_{\log} \geq 0\ \ (= ||0||_{\log})$.

□ Если $c = 0$, то $||cA||_{\log} = ||0||_{\log} = 0 = c||A||_{\log}$ и при $c = 0$ свойство 1) проверено. Если $c > 0$, то согласно (9.1) имеем

$$||cA||_{\log} = \lim_{0<t\to 0} \frac{||I + t(cA)|| - ||I||}{t} =$$

$$= \lim_{0<ct\to 0} c\frac{||I + (tc)A|| - ||I||}{tc} = c||A||_{\log},$$

что и доказывает свойство 1) в этом случае. Если $c < 0$, то по уже установленному

$$||cA||_{\log} = || - c(-A)||_{\log} = -c|| - A||_{\log}$$

и свойство 1) полностью проверено.

Отметим, что здесь свойство полуаддитивности имеет место без каких-либо ограничений. Действительно,

$$I + t(A + B) = \frac{1}{2}(I + 2tA) + \frac{1}{2}(I + 2tB).$$

Поэтому

$$||I + t(A + B)|| - ||I|| \leq \frac{1}{2}(||I + 2tA|| - ||I||) + \frac{1}{2}(||I + 2tB|| - ||I||),$$

откуда вытекает, что

$$\frac{||I + t(A + B)|| - ||I||}{t} \leq \frac{||I + 2tA|| - ||I||}{2t} + \frac{||I + 2tB|| - ||I||}{2t}$$

и при $0 < t \to 0$ получаем требуемое неравенство 2).

Для доказательства оценки 3) в силу обратного неравенства треугольника для матричной нормы получаем

$$\left|\frac{||I + tA|| - ||I||}{t}\right| \leq \frac{||I + tA - I||}{t} = \frac{||tA||}{t} = ||A||,$$

откуда при $0 < t \to 0$ приходим к требуемой оценке.

Свойство 4) устанавливается подобными рассуждениями:

$$\left|\frac{||I + tA|| - ||I||}{t} - \frac{||I + tB|| - ||I||}{t}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{||I + tA|| - ||I + tB||}{t}\right| \leq \frac{||I + tA - (I + tB)||}{t} =$$

$$= \frac{||t(A - B)||}{t} = ||A - B||,$$

предельный переход при $0 < t \to 0$ завершает проверку.

Свойство 5) проверяется почти очевидным образом.

$$0 = ||0||_{\log} = ||A - A||_{\log} \le ||A||_{\log} + ||-A||_{\log}.$$

На последнем этапе рассуждений мы воспользовались полуаддитивностью 4). ■

§ 10. Спектральная абсцисса и логарифмическая норма

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с вещественными или комплексными элементами. Нас интересует поведение матричной экспоненты

$$e^{tA} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \tag{10.1}$$

где $I = (\delta_{ij})$ есть единичная $n \times n$-матрица ($||I|| = 1$) (δ_{ij}, как обычно, символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \ne j$). Из (10.1) вытекает, что при $t \ge 0$

$$||e^{tA}|| = \left|\left| I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right|\right| \le$$

$$\le ||I|| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left| \frac{t^k A^k}{k!} \right|\right| \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k ||A^k||}{k!} = e^{t||A||}.$$

Далее, так как $I = e^{tA} e^{-tA}$, то в силу предыдущего изложения

$$1 = ||I|| \le ||e^{tA}|| ||e^{-tA}|| \le ||e^{tA}|| e^{t||-A||} = ||e^{tA}|| e^{t||A||},$$

$$e^{-t||A||} \le ||e^{tA}||.$$

Поэтому

$$e^{-t||A||} \le ||e^{tA}|| \le e^{t||A||}, \quad 0 \le t < +\infty. \tag{10.2}$$

Выписанные константы $-||A||$ и $||A||$, вообще говоря, не являются наилучшими. Пусть α и a – наилучшие константы в оценках

$$e^{t\alpha} \le ||e^{tA}|| \le e^{ta}, \ \ 0 \le t < +\infty. \tag{10.3}$$

Ясно, что $-||A|| \le \alpha \le a \le ||A||$; существование таких констант не вызывает сомнений.

Теорема 10.1. *Пусть α – наилучшая константа в оценке* (10.3) *снизу. Тогда*

$$\alpha = \inf_{0<t} \frac{\ln ||e^{tA}||}{t} = \lim_{0<t\to+\infty} \frac{\ln ||e^{tA}||}{t} = \max_{1\le i\le n} \mathrm{Re}\ \lambda_i(A). \tag{10.4}$$

Доказательство см. в книге Ю. Л. Далецкого, М. Г. Крейна [15, с. 42–43, теорема 4.1]. Последнее равенство в (10.4) говорит о том, что α является спектральной абсциссой матрицы $A : \alpha = \mathrm{spa}\ A$ (см. § 7). Подчеркнём, что спектральная абсцисса не зависит от выбора нормы в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 10.2. *Пусть a – наилучшая константа в оценке* (10.3) *сверху. Тогда*

$$a = \sup_{0<t} \frac{\ln ||e^{tA}||}{t} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||e^{tA}||}{t} = \tag{10.5}$$

$$= \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||I+tA||}{t} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||I+tA|| - ||I||}{t}.$$

Последнее равенство в (10.5) говорит о том, что a является логарифмической нормой матрицы $A : a = ||A||_{\log}$ (см. § 9).

□ Рассмотрим логарифмическую функцию на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Так как она непрерывно дифференцируема, то она удовлетворяет условию Липшица. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|\ln u - \ln v| \le \le (1+\varepsilon)|u-v|$ при условии, что $|u-1| < \delta$ и $|v-1| < \delta$. Отсюда вытекает, что при выполнении условия $|||e^{tA}|| - 1| < \delta$ и $|||I+tA|| - 1| < \delta$ имеем

$$| \ln ||e^{tA}|| - \ln ||I + tA||| \leq (1+\varepsilon)| \; ||e^{tA}|| - ||I + tA|| \; | \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)||e^{tA} - (I + tA)|| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k ||A||^k}{k!} = e^{t||A||} - 1 - t||A||.$$

Поэтому

$$\lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||e^{tA}||}{t} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||I + tA||}{t} \tag{10.6}$$

при условии, что хотя бы один из этих пределов существует.

Далее, полагая $\varepsilon(t) = ||I + tA|| - 1$, мы можем написать

$$\frac{\ln ||I + tA||}{t} = \frac{||I + tA|| - ||I||}{t} \quad \text{при} \quad \varepsilon(t) = 0;$$

$$\frac{\ln ||I + tA||}{t} = \frac{\ln(1 + \varepsilon(t))}{\varepsilon(t)} \frac{||I + tA|| - ||I||}{t} \quad \text{при} \quad \varepsilon(t) \neq 0,$$

откуда в силу известного соотношения $\ln(1 + x)/x \to 1$ при $x \to 0$ получаем

$$\lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||I + tA||}{t} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||I + tA|| - ||I||}{t}. \tag{10.7}$$

Осталось доказать, что

$$\sup_{0<t} \frac{\ln ||e^{tA}||}{t} = \lim_{0<t\to 0} \frac{\ln ||e^{tA}||}{t}. \tag{10.8}$$

Стоящая слева величина существует и конечна; обозначим её через a. Стоящий справа предел существует и конечен; обозначим его через b. Из определения числа a вытекает, что $a \geq b$. Предположим на мгновение, что написанное неравенство строгое: $a > b$. Подберём $\varepsilon > 0$ так, чтобы $a - \varepsilon \geq b + \varepsilon$ (для этого нужно только предположить, что $0 < \varepsilon \leq (a - b)/2$). По указанному $\varepsilon > 0$ найдём $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы $||e^{tA}|| \leq e^{t(b+\varepsilon)}$ при $0 < t \leq \delta$.

Рассмотрим произвольное $t > 0$. Подберём натуральное p так, чтобы $(0 <)\ t/p \leq \delta$. После этого, оценивая

$$||e^{tA}|| = ||e^{p\frac{t}{p}A}|| \leq ||e^{\frac{t}{p}A}||^p \leq e^{\frac{t}{p}(b+\varepsilon)p} = e^{t(b+\varepsilon)} \leq e^{t(a-\varepsilon)},$$

получаем, что

$$||e^{tA}|| \leq e^{t(a-\varepsilon)} \text{ при } 0 < t < +\infty,$$

и это явно противоречит определению числа a. Итак, равенство (10.8) также доказано.

Из соотношений (10.6)–(10.8) непосредственно вытекает справедливость формулы (10.5). ■

Из теорем 10.1 и 10.2 вытекают важные неравенства

$$\alpha = \operatorname{spa} A \leq ||A||_{\log} = a. \tag{10.9}$$

§ 11. Формула для логарифмической нормы

Для нахождения логарифмической нормы нами будет получена формула

$$||A||_{\log} = \sup_{x \neq 0} \frac{[x, Ax]}{||x||}, \tag{11.1}$$

где

$$[x, h] = \lim_{0<t\to 0} \frac{||x + th|| - ||x||}{t} \tag{11.2}$$

есть односторонний дифференциал Гато нормы (см. § 8). Эта формула приведена в [10, с. 462, формула (26)]. Ниже предлагается другое доказательство соотношения (11.1).

Теорема 11.1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $n \times n$-матрица с вещественными или комплексными элементами. Тогда справедлива формула* (11.1).

□ Обозначим для краткости правую часть формулы (11.1) через a. Так как для $x \in \mathbb{C}^n$ имеем $||x + tAx|| = ||(I + tA)x|| \leq ||I+$ $+tA||||x||$, то

$$[x, Ax] = \lim_{0<t\to 0} \frac{||x + tAx|| - ||x||}{t} \leq$$

$$\leq \lim_{0<t\to 0} \frac{||I + tA|| - ||I||}{t}||x|| = ||A||_{\log}||x||,$$

откуда в силу произвольности x находим

$$||A||_{\log} \geq a. \tag{11.3}$$

Пусть $x(t) = \exp(tA)x$, где $x \in \mathbb{C}^n$. Векторная функция $x(t)$ непрерывно дифференцируема, причём $\dot{x}(t) = Ax(t)$, согласно [15, с. 93, задача 18] числовая функция $||x(t)||$ дифференцируема справа, причём $||x(t)||'_+ = [x(t), \dot{x}(t)]$. В нашем случае $[x(t), \dot{x}(t)] =$ $= [x(t), Ax(t)] \leq a||x(t)||$ и мы приходим к дифференциальному неравенству

$$||x(t)||'_+ \leq a||x(t)||. \tag{11.4}$$

Согласно [42, с. 48, задача 7] (см. также [9, с. 86–87]) из написанного дифференциального неравенства вытекает оценка

$$||x(t)|| \leq a^{ta}||x(0)||, \;\; 0 \leq t < +\infty. \tag{11.5}$$

Поэтому $||\exp(tA)x|| \leq \exp(ta)||x||$, откуда в силу произвольности x вытекает оценка $||\exp(tA)|| \leq \exp(ta)$, что означает

$$||A||_{\log} \leq a. \tag{11.6}$$

Из неравенств (11.3) и (11.6) вытекает справедливость формулы (11.1). ■

§ 12. Границы для логарифмической нормы

Из содержания предыдущих параграфов вытекает, что логарифмическая норма лежит в границах $\alpha \equiv \text{spa } A \leq a \equiv ||A||_{\log} \leq$

$\leq ||A||$ для любой матричной нормы. Оказывается – о чём говорит приводимая ниже теорема – за счёт выбора матричной нормы можно добиться того, чтобы логарифмическая норма была сколь угодно близка к спектральной абсциссе.

Теорема 12.1. *Пусть* $A = (a_{ij})$ *– квадратная* $n \times n$*-матрица и* $\alpha = \operatorname{spa} A$ *– её спектральная абсцисса. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такую матричную норму* $||.||_{(\varepsilon)}$, *что*

$$(\alpha \leq)\ ||A||_{(\varepsilon)\log} \leq \alpha + \varepsilon. \tag{12.1}$$

$\square$ Пусть $\alpha < \lambda$. Введём новую норму, положив

$$||x||_{(\lambda)} = \int\limits_0^{+\infty} ||e^{tA}x||e^{-t\lambda}dt \ \ (\alpha < \lambda). \tag{12.2}$$

Проверим, что написанный несобственный интеграл сходится. Так как $\alpha < \lambda$, то $\alpha + \varepsilon < \lambda$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Из теоремы 10.1 вытекает существование такой константы $M(\varepsilon) > 0$, что имеет место оценка $||\exp(tA)|| \leq M(\varepsilon)\exp(t(\alpha+\varepsilon))$ при $0 \leq t < +\infty$. Поэтому

$$||x||_{(\lambda)} \leq \int\limits_0^{+\infty} ||e^{tA}x||e^{-t\lambda}dt||x|| \leq \tag{12.3}$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty} M(\varepsilon)e^{t(\alpha+\varepsilon-\lambda)}dt||x|| = \frac{M(\varepsilon)}{\lambda - (\alpha+\varepsilon)}||x||.$$

Мы видим, что несобственный интеграл абсолютно сходится, причём новая норма эквивалентна старой.

Пусть $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Рассмотрим норму (12.2) при $\infty < \lambda < \alpha + \varepsilon$ и положим $||x||_{(\varepsilon)} = ||x||_{(\lambda)}$. В новой норме имеем (сравни с [15, с. 47])

$$||e^{tA}x||_{(\varepsilon)} = \int\limits_0^{+\infty} ||e^{sA}e^{tA}x||e^{-s\lambda}ds \le e^{t\lambda} \int\limits_0^{+\infty} ||e^{(t+s)A}x||e^{-(t+s)\lambda}ds =$$

$$= e^{t\lambda} \int\limits_0^{+\infty} ||e^{sA}x||e^{-s\lambda}ds \le e^{t\lambda}||x||_{(\varepsilon)}.$$

Итак, $||\exp(tA)x||_{(\varepsilon)} \le e^{t\lambda}||x||_{(\varepsilon)}$. Откуда в силу произвольности x из $\mathbb{C}^n$ вытекает оценка $||A||_{(\varepsilon)\log} \le \lambda$ и, следовательно,

$$(\alpha \le)\ ||A||_{(\varepsilon)\log} \le \alpha + \varepsilon. \tag{12.4}$$

Оценка (12.1) установлена. ■

§ 13. Гурвицевы матрицы

Напомним, что матрица A называется *гурвицевой,* если все её собственные значения лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$:

$$\alpha \equiv \operatorname{spa} A < 0. \tag{13.1}$$

Так как имеет место неравенство (10.9): $\operatorname{spa} A \le ||A||_{\log}$, то достаточным условием гурвицевости матрицы A является неравенство

$$a \equiv ||A||_{\log} < 0. \tag{13.2}$$

В дальнейшем нам потребуется формула

$$(\lambda I - A)^{-1} = \int\limits_0^{+\infty} e^{tA}e^{-t\lambda}dt \ \ (\alpha < \operatorname{Re}\lambda), \tag{13.3}$$

свидетельствующая о том, что резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ является (односторонним) преобразованием Лапласа матричной экспоненты e^{tA} [14, с. 426, задача 60].

Теорема 13.1. *Если выполнено условие* (13.2), *то матрица* A *гурвицева и имеет место следующая оценка резольвенты:*

$$\big|\big|(\lambda I - A)^{-1}\big|\big| \le \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda - a} \ \ (a < \mathrm{Re}\,\lambda). \tag{13.4}$$

□ Из формулы (13.3) находим

$$\big|\big|(\lambda I - A)^{-1}\big|\big| \le \int\limits_0^{+\infty} ||e^{tA}|| e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda} dt \le \int\limits_0^{+\infty} e^{ta} e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda} dt = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda - a},$$

и требуемая оценка (13.4) установлена. ■

При $\lambda = 0$ из оценки (13.4) выводим

$$||A||^{-1} \le \frac{1}{|a|}. \tag{13.5}$$

Заметим, что в условиях теоремы 13.1 для логарифмической нормы справедлива оценка снизу

$$-||A|| \le -||A||^{-1} \le a \ \ (< 0). \tag{13.6}$$

Действительно, так как $1 = ||I|| = ||AA^{-1}|| \le ||A||||A^{-1}||$, то $||A^{-1}||^{-1} \le ||A||$, что в соответствии с оценкой (13.5) приводит к цепочке $|a| \le ||A^{-1}||^{-1} \le ||A||$, совпадающей с точностью до знака с (13.6) в силу предположения (13.2).

Отметим, что оценка (13.5) ранее другим методом получена в статье С. М. Лозинского [26].

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Блочные признаки регулярности и гурвицевости

§ 14. Неотрицательные и внедиагонально неотрицательные матрицы

В дальнейшем нам потребуются некоторые общие сведения из книги Ф. Р. Гантмахера [13, с. 352–405]. Напомним некоторые основные определения и обозначения. Для вещественных векторов a и b с компонентами a_1, a_2, ..., a_n и b_1, b_2, ..., b_n соответственно мы будем писать $a \leq b$ или $a < b$, в зависимости от того $a_i \leq b_i$ или $a_i < b_i$ при всех $i = 1, 2, .., n$. Вектор $a \geq 0$ называется *неотрицательным,* а вектор $a > 0$ называется *положительным.* Пусть теперь a является комплексным вектором с компонентами a_1, a_2, ..., a_n. Вещественный неотрицательный вектор с компонентами $|a_1|$, $|a_2|$, ..., $|a_n|$ называется *модулем* вектора a и обозначается $|a|$.

Аналогично для матриц. Для вещественных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ мы будем писать $A \leq B$ или $A < B$, в зависимости от того $a_{ij} \leq b_{ij}$ или $a_i < b_i$ при всех $i, j = 1, 2, .., n$. Матрица $A \geq 0$ называется *неотрицательной,* а матрица $A > 0$ называется *положительной.* Пусть теперь A является комплексной матрицей. Вещественная неотрицательная матрица с элементами $|a_{ij}|$ называется *модулем* матрицы A и обозначается $|A|$.

Итак, матрица $A = (a_{ij})$ (вещественная) называется неотрицательной, если

$$a_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, .., n. \tag{14.1}$$

Теорема 14.1 (критерий Мецлера – Котелянского). *Для того чтобы спектральный радиус положительной $n \times n$-матрицы $Q = (q_{ij})$ был меньше единицы,*

$$0 \leq Q, \quad \operatorname{spr} Q < 1, \tag{14.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы были положительны последовательные главные миноры матрицы $I - Q = (\delta_{ij} - q_{ij})$:

$$\begin{vmatrix} 1-q_{11} & -q_{12} & \dots & -q_{1p} \\ -q_{21} & 1-q_{22} & \dots & -q_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -q_{n1} & -q_{n2} & \dots & 1-q_{np} \end{vmatrix} > 0, \quad p = 1, 2, .., n. \tag{14.3}$$

См. книги Р. Беллмана [7, с. 235, упр. 1], Ф. Р. Гантмахера [13, с. 368, 7^0], статью А. И. Перова и Т. С. Грязновой [37].

Следующие две теоремы из теории внедиагонально неотрицательных матриц $C = (c_{ij})$. Для *внедиагонально неотрицательных матриц*

$$c_{ij} \geq 0 \ \ \textit{при} \ \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, .., n. \tag{14.4}$$

Теорема 14.2 (критерий гурвицевости Севастьянова – Котелянского). *Для того чтобы спектральная абсцисса вещественной внедиагонально неотрицательной матрицы* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *была неотрицательной,*

$$\operatorname{spa} C < 0, \tag{14.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы были положительными последовательные главные миноры матрицы $-C = (-c_{ij})$

$$(-1)^p \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pp} \end{pmatrix} > 0, \quad p = 1, 2, ..., n. \tag{14.6}$$

***Упражнение* 14.1.** *Путь* $A = (a_{ij})$ *и* $B = (b_{ij})$ *– комплексные* $n \times n$*-матрицы. Проверьте, что* $|A| \geq 0$; $|A| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
$|cA| = |c||A|$; $|A + B| \leq |A| + |B|$ *(неравенство треугольника). Докажите обратное неравенство треугольника* $||A| - |B|| \leq |A - B|$.

Теорема 14.3. *Для того чтобы вещественная внедиагонально неотрицательная матрица $C = (c_{ij})$ была гурвицевой, необходимо и достаточно, чтобы диагональные элементы этой матрицы были отрицательными,*

$$c_{11} < 0,\ c_{22} < 0,\ \dots\ ,\ c_{nn} < 0, \tag{14.7}$$

а спектральный радиус неотрицательной матрицы Q с нулевой диагональю

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_{12}}{c_{11}} & \dots & -\frac{c_{1n}}{c_{11}} \\ -\frac{c_{21}}{c_{22}} & 0 & \dots & -\frac{c_{2n}}{c_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{c_{n1}}{c_{nn}} & \dots & -\frac{c_{n,n-1}}{c_{nn}} & 0 \end{pmatrix} \tag{14.8}$$

был меньше единицы:

$$0 \le Q, \ \ \mathrm{spr}\, Q < 1. \tag{14.9}$$

См. подробнее работу А. И. Перова [39].

§ 15. Теорема Фидлера и блочный признак гурвицевости

Пусть $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство и $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$, ..., $\mathbb{B}_m$ – некоторые его подпространства, прямая сумма которых совпадает с самим $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{B}_m. \tag{15.1}$$

Эта запись означает, что любой элемент x из $\mathbb{B}$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_m, \ \text{ где } x_i \in \mathbb{B}_i, \ \ i = 1, 2, ..., m. \tag{15.2}$$

Полагая $x_i = P_i x$, $i = 1, 2, ..., m$, мы приходим к проекторам P_i, которые образуют разложение единицы

$$I = P_1 + P_2 + ... + P_m, \ \ P_i^2 = P_i, \ \ P_i P_j = 0 \text{ при } i \ne j. \tag{15.3}$$

Поставим в соответствие оператору A, действующему в $\mathbb{B}$, операторную матрицу

$$A = (A_{ij}), \text{ где } A_{ij} = P_i A P_j : \mathbb{B}_j \to \mathbb{B}_i, \;\; i, j = 1, 2, ..., m. \tag{15.4}$$

Ясно, что $||A_{ij}|| \le ||P_i A P_j||$.

Теорема 15.1 (сравни с теоремой Фидлера [13, с. 414–415]). *Пусть диагональные операторы A_{ii} являются обратимыми. Пусть $C = (c_{ij})$ есть некоторая вещественная внедиагонально неотрицательная матрица, для которой*

$$-||A_{ii}^{-1}||^{-1} \le c_{ii}, \;\; ||A_{ij}|| \le c_{ij}, \;\; \textit{при } \; i \ne j. \tag{15.5}$$

Пусть матрица C является гурвицевой. Тогда оператор A обратим и справедлива следующая оценка обратного оператора:

$$||A_{ij}^{(-1)}|| \le -c_{ij}^{(-1)}, \;\; \textit{где } \; A^{-1} = \left(A_{ij}^{(-1)}\right) \;\; \textit{и } \; C^{-1} = \left(c_{ij}^{(-1)}\right). \tag{15.6}$$

По сравнению с оригинальной теоремой Фидлера новое заключается в том, что новой является формулировка теоремы, новым является её доказательство и новой является оценка (15.6) (в теореме Фидлера её просто нет!). Теорема Фидлера получается, если в оценке (15.5) везде стоит знак равенства (...построим внедиагонально неотрицательную матрицу $C = (c_{ij})$, положив

$$c_{ii} = -||A_{ii}^{-1}||^{-1} \;\text{ и }\; c_{ij} = ||A_{ij}|| \;\text{ при }\; i \ne j).$$

□ Рассмотрим уравнение

$$Ax = y, \tag{15.7}$$

которое в соответствии с разложением (15.2) и операторной матрицей (15.4) запишем в виде системы векторных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j = y_i, \;\; i = 1, 2, ..., m. \tag{15.8}$$

Эту систему, учитывая обратимость диагональных операторов, перепишем в виде

$$x_i = -\sum_{j \neq i} A_{ii}^{-1} A_{ij} x_j + A_{ii}^{-1} y_i, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{15.9}$$

Введём векторную норму, положив

$$\mathbf{|} x \mathbf{|} = \begin{pmatrix} ||x_1|| \\ ||x_2|| \\ \dots \\ ||x_m|| \end{pmatrix}. \tag{15.10}$$

Согласно условию (15.5) имеем

$$\sum_{j \neq i} ||A_{ii}^{-1}|| ||A_{ij}|| \leq \sum_{j \neq i} -c_{ii}^{-1} c_{ij} \equiv q_{ij}, \tag{15.11}$$

где $Q = (q_{ij})$ – неотрицательная матрица с нулевой диагональю. Так как матрица C по условию теоремы гурвицева, то по теореме 14.3 спектральный радиус матрицы Q (сравни с (14.8)) меньше единицы. Поэтому система (15.9), а значит и система (15.8), имеет единственное решение. Мы применим обобщённый принцип сжимающих отображений (см., например, работу А. И. Перова [36]). Итак, оператор A обратим.

Установим оценку (15.6). Положим

$$\xi = \begin{pmatrix} ||x_1|| \\ ||x_2|| \\ \dots \\ ||x_m|| \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} ||A_{11}^{-1}|| ||y_1|| \\ ||A_{22}^{-1}|| ||y_2|| \\ \dots \\ ||A_{mm}^{-1}|| ||y_m|| \end{pmatrix}. \tag{15.12}$$

Тогда из системы (15.9) выводим

$$\xi \leq Q\xi + \eta. \tag{15.13}$$

Так как спектральный радиус неотрицательной матрицы Q меньше единицы, то матрица $I - Q$ имеет обратную $(I - Q)^{-1}$ и эта обратная матрица является неотрицательной $(I - Q)^{-1} \geq 0$. Поэтому из (15.13) вытекает оценка

$$\xi \leq (I - Q)^{-1} \eta. \tag{15.14}$$

(Поясним, что из (15.13) имеем $\xi - Q\xi \le \eta$ или $(I - Q)\xi \le \eta$; применим к обеим частям неравенства неотрицательную матрицу $(I-Q)^{-1} \ge 0$; мы получим $\xi \le (I-Q)^{-1}\eta$). Запишем матрицу C в виде $C = -C_0 + C_1$, где C_0 – диагональная матрица с элементами $|c_{11}|$, $|c_{22}|$, ..., $|c_{nm}|$, откуда вытекает, что $C_0 \ge 0$; совершенно ясно, что матрица C_1 также неотрицательная. Так как $(I - Q)^{-1} = -C^{-1}C_0$, то из (15.14) выводим $\| x \| \le (-C^{-1}) \| y \|$ и оценка (15.6) получена. $\blacksquare$

Пояснение: $C = -C_0 + C_1$, где $C_0 \ge 0$, $C_1 \ge 0$.

$$C_0 = \begin{pmatrix} |c_{11}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |c_{22}| & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & |c_{mn}| \end{pmatrix}; \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$Q = C_0C_1 \ge 0$, $I - Q = I - C_0^{-1}C_1 = -C_0^{-1}(-C_0 + C_1) = -C_0^{-1}C$. Поэтому $(I - Q)^{-1} = (-C)^{-1}C_0$. Как известно, $-C^{-1} \ge 0$ (см., например, книгу И. М. Глазмана и Ю. И. Любича [14])

$$C_0\eta = \begin{pmatrix} |c_{11}|||A_{11}^{-1}||||y_1|| \\ |c_{22}|||A_{22}^{-1}||||y_2|| \\ \dots \\ |c_{mm}|||A_{mm}^{-1}||||y_m|| \end{pmatrix}.$$

$-||A_{ii}^{-1}||^{-1} \le c_{ii}$ – это есть $||A_{ii}^{-1}||^{-1} \ge -c_{ii}$. $|c_{ii}|||A_{ii}^{-1}|| = -c_{ii}||A_{ii}^{-1}|| \le$ ≤ 1 – это есть $1 \ge -c_{ii}||A_{ii}^{-1}||$.

Теорема 15.2 (блочный признак гурвицевости). *Пусть диагональные операторы* $A_{ii} : \mathbb{B}_i \to \mathbb{B}_i$, $i = 1, 2, ..., m$ *блочной матрицы* A (15.4), *являются гурвицевыми; более определённо: пусть их логарифмические нормы отрицательны:*

$$||A_{ii}||_{\log} < 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{15.15}$$

Пусть для некоторой вещественной внедиагонально неотрицательной $m \times m$*-матрицы* $C = (c_{ij})$

$$||A_{ii}||_{\log} \le c_{ii}, \quad ||A_{ij}|| \le c_{ij}, \quad \textit{при } i \ne j. \tag{15.15}$$

Пусть матрица C является гурвицевой.

Тогда матрица A является гурвицевой, причём

$$\operatorname{spa} A \le \operatorname{spa} C \ \ (< 0). \tag{15.16}$$

□ Запишем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax \tag{15.18}$$

в соответствии с разложением (15.2) и блочной матрицей (15.4) в виде системы векторных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j, \ \ i = 1, 2, ..., m. \tag{15.19}$$

Рассмотрим векторную функцию с числовыми компонентами

$$||x(t)|| = \begin{pmatrix} ||x_1(t)|| \\ ||x_2(t)|| \\ \dots \\ ||x_m(t)|| \end{pmatrix}. \tag{15.20}$$

Учитывая свойства квадратных скобок $[x, h]$, мы можем написать

$$||x_i(t)||'_+ = [x_i(t), \dot{x}_i(t)] = \left[x_i(t), \sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j(t) \right] \le$$

$$\le [x_i(t), A_{ii}(t) x_i(t)] + \sum_{j \ne i} [x_i(t), A_{ij}(t) x_j(t)] \le$$

$$\le ||A_{ii}||_{\log} ||x_i(t)|| + \sum_{j \ne i} ||A_{ij}|| ||x_j(t)||,$$

откуда в силу (15.16) приходим к системе дифференциальных неравенств

$$||x_i(t)||'_+ \le \sum_{j=1}^{m} c_{ij} ||x_j(t)||, \ \ i = 1, 2, ..., m. \tag{15.21}$$

Так как по построению матрица C является внедиагонально неотрицательной, то из (15.21) вытекает оценка (см., например, [6, с. 123, § 43])

$$\begin{pmatrix} ||x_1(t)|| \\ ||x_2(t)|| \\ \cdots \\ ||x_m(t)|| \end{pmatrix} \le e^{tC} \begin{pmatrix} ||x_1(0)|| \\ ||x_2(0)|| \\ \cdots \\ ||x_m(0)|| \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < +\infty. \qquad (15.22)$$

Так как матрица C, по предположению, является гурвицевой, то оценка (15.22) показывает, что система (15.19), а значит, и система (15.18) является асимптотически устойчивой. Поэтому матрица A является гурвицевой.

Для доказательства оценки (15.17) будем рассуждать следующим образом. Предположим, что матрица C в дополнение ко всем своим свойствам является ещё и неразложимой. (Отметим, что сколь угодно малым возмущением исходную матрицу можно превратить в неразложимую с сохранением свойств внедиагональной неотрицательности и гурвицевости). В этом случае из теории Перрона – Фробениуса [13, с. 354–365] вытекает существование такого вещественного положительного вектора h из $\mathbb{R}^m$, $h > 0$, что

$$Ch = \alpha h, \ \text{ где } \ \alpha = \operatorname{spa} C < 0 \text{ и } h > 0. \qquad (15.23)$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} h_j = \alpha h_i, \ \ \sum_{j=1}^{m} h_i^{-1} c_{ij} h_j = \alpha, \ \ i = 1, 2, ..., m. \qquad (15.24)$$

Из последних соотношений вытекает, что

$$||H^{-1}CH||_{0\log} = \alpha < 0, \ \text{ где } \ H = \operatorname{diag}\{h_1, h_2, ..., h_m\}. \qquad (15.25)$$

Положим $\xi_i(t) = ||x_i(t)||$, $i = 1, 2, ..., m$. Согласно (15.21) получаем

$$\xi'_{i+}(t) \le \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \xi_j(t) \ \ i = 1, 2, ..., m. \qquad (15.26)$$

Положим $\eta_i(t) = h_i\xi_i(t)$, $i = 1, 2, ..., m$. Тогда

$$\eta'_{i+}(t) \le \sum_{j=1}^{m} h_i^{-1} c_{ij} h_j \eta_j(t), \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{15.27}$$

откуда согласно (15.24)

$$\Vert \eta(t) \Vert_0 \le \Vert \eta(0) \Vert, \quad 0 \le t < +\infty. \ \blacksquare$$

§ 16. Гёльдеровы нормы

Пусть $x \in \mathbb{C}^n$. Положим (сравни с [45, с. 127–136] и [5, с. 55–58])

$$||x||_0 = \max_i |x_i|, \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||x||_{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

и вообще

$$||x||_\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\sigma}, \quad 0 < \sigma \le 1. \tag{16.1}$$

Можно доказать – иногда это совершенно элементарно, – что написанное выражение является нормой вектора (см. § 5). Нормы вида (16.1) называются *гёльдеровыми* нормами.

***Упражнение* 16.1.** *Проверьте, что $||x||_\sigma$ при любом σ, $0 \le \le \sigma \le 1$, является нормой.*

При фиксированном x из $\mathbb{C}^n$ числовая функция $||x||_\sigma$ от σ непрерывна и $||x||_\sigma \to ||x||_0$ при $0 < \sigma \to 0$. Далее, $||x||_\sigma$ логарифмически выпукла по σ. Отметим, что

$$||x||_\sigma \le n^{(\sigma-\tau)_+} ||x||_\tau, \quad 0 \le \sigma, \tau \le 1, \tag{16.2}$$

где u_+ есть *положительная часть* числа u ($u_+ = u$, если $u > > 0$, и $u_+ = 0$, если $u \le 0$), причём выписанная константа $n^{(\sigma-\tau)_+}$ является наилучшей.

***Упражнение* 16.2.** *Докажите непрерывную зависимость* $||x||_\sigma$ *от* σ.

***Упражнение* 16.3.** *Верно ли утверждение о логарифмической выпуклости* $||x||_\sigma$ *от* σ?

***Упражнение* 16.4.** *Установите оценку* (16.2), *включая утверждение о точности константы.*

Соответствующую норму матрицы определим как операторную

$$||A||_\sigma = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\sigma}{||x||_\sigma}. \tag{16.3}$$

В явном виде эти нормы могут быть найдены в исключительных случаях

$$||A||_0 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{16.4}$$

$$||A||_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{spa } A^*A},$$

где spa A^*A есть неотрицательное максимальное собственное значение самосопряжённой матрицы A^*A (неотрицательно определённой).

Мы закончим этот параграф двумя оценками нормы $||A||_\sigma$ сверху. Пусть $A = (a_{ij})$ и $y = Ax$. Так как

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

то по неравенству Гёльдера (1.3)

$$|y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{\sigma} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\sigma},$$

откуда вытекает, что

$$||y||_\sigma \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right)^{\sigma} ||x||_\sigma.$$

Поэтому

$$||A||_\sigma \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right)^{\sigma}. \qquad (16.5)$$

Рассмотрим соотношение $y = Ax$ несколько иначе

$$y = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j,$$

где $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ с 1 на j-м месте. Так как

$$||y||_\sigma \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\sigma} \left(\sum_{j=1}^{n} ||Ae_j||_\sigma^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{1-\sigma},$$

откуда вытекает

$$||A||_\sigma \le \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \right)^{1-\sigma}. \qquad (16.6)$$

Отметим, что при $\sigma = 1/2$ обе оценки (16.5) и (16.6) приводят к одному и тому же результату:

$$||A||_{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (16.7)$$

Справа стоит хорошо известная в теории матриц норма Уайхеда – Веддебёрха.

§ 17. Теорема Марселя Рисса и оценки нормы и логарифмической нормы

По теореме Марселя Рисса (см., например, [48, с. 258–267] или [25, с. 22–25]) числовая функция $||A||_\sigma$ логарифмически выпукла по σ, откуда вытекает, что

$$||A||_\sigma \leq ||A||_0^{1-\sigma}||A||_1^\sigma, \ \ 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{17.1}$$

Так как нормы $||A||_0$ и $||A||_1$ нам известны (см. (16.4)), то оценка (17.1) имеет вполне эффективный характер. Заметим, что либо $A = 0$ и тогда $||A||_\sigma \equiv 0$, либо $A \neq 0$ и тогда $||A||_\sigma > 0$ при $0 \leq \sigma \leq 1$ и можно говорить о $\ln ||A||_\sigma$.

По неравенству Юнга (1.1) из (17.1) следует

$$||A||_\sigma \leq (1-\sigma)||A||_0 + \sigma||A||_1, \ \ 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{17.2}$$

С другой стороны, ни одна из оценок спектрального радиуса (4.1) и (4.5) – как показывают простые примеры – не может быть принята для оценки $||A||_\sigma$ сверху. Выдвинем в качестве гипотезы, что оценка (4.6) приводит к оценке нормы $||A||_\sigma$ снизу

$$\max_{1\leq i\leq n}\left\{(1-\sigma)\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| + \sigma\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|\right\} \leq ||A||_\sigma, \ \ 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{17.3}$$

Отметим, что при $\sigma = 0$ и при $\sigma = 1$ в оценке (17.3) имеет место знак равенства.

Обозначим через $a(\sigma)$ логарифмическую норму матрицы $||A||_\sigma$,

$$a(\sigma) = ||A||_{\sigma\log}, \ \ 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{17.4}$$

Теорема 17.1. *Логарифмическая норма матрицы $||A||_\sigma$ является выпуклой; в частности*

$$a(\sigma) \leq (1-\sigma)a(0) + \sigma a(1), \ \ 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{17.5}$$

$\square$ По определению функции $a(\sigma)$ имеем

$$||e^{tA}||_0 \leq e^{ta(0)} u^{||e^{tA}||_1} \leq e^{ta(1)}, \ \ 0 \leq t < +\infty.$$

По теореме Марселя Рисса из (17.1) выводим

$$||e^{tA}||_\sigma \leq ||e^{tA}||_0^{1-\sigma} ||e^{tA}||_1^\sigma.$$

Поэтому в силу предыдущего

$$||e^{tA}||_\sigma \leq e^{t(1-\sigma)a(0)} e^{t\sigma a(1)} = e^{t[(1-\sigma)a(0)+\sigma a(1)]},$$

что в силу определения логарифмической нормы $||A||_{\sigma \log}$ приводит к оценке (17.5). $\blacksquare$

§ 18. Формулы и оценки для логарифмической нормы

Отметим известные формулы для логарифмической нормы

$$||A||_{0 \log} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \mathrm{Re}\, a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\},$$

$$||A||_{1 \log} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \mathrm{Re}\, a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \right\}, \tag{18.1}$$

$$||A||_{\frac{1}{2} \log} = \mathrm{spa}\, \frac{A + A^*}{2}.$$

Поясним, что в последнем случае речь идёт о максимальном собственном значении самосопряжённой матрицы $(A + A^*)/2$.

Мы хотим найти оценку для $||A||_{\sigma \log}$ сверху для приводимого σ, $0 \leq \sigma \leq 1$. Напомним, что (см. (16.1))

$$||x||_\sigma = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{\sigma}} \right)^\sigma, \ \ 0 < \sigma \leq 1. \tag{18.2}$$

$$[x, h]_0 = \lim_{0 < t \to 0} \frac{||x + th||_\sigma - ||x||_\sigma}{t}. \tag{18.3}$$

Лемма 18.1. *Имеет место формула*

$$[x, h]_\sigma = ||x||_\sigma^{1-\frac{1}{\sigma}} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{\sigma}-1} \operatorname{Re} \frac{x_i \overline{h}_i}{|x_i|}, \tag{18.4}$$

где в случае $x_i = 0$ *последнее выражение нужно заменить на* $|h_i|$.

В формуле (18.4) неявно предполагается, что $x \neq 0$; если $x = 0$, то $[0, h]_\sigma = ||h||_\sigma$.

Доказательство основано на формуле

$$\frac{d}{dt}|x + th|_{|t=0} = \begin{cases} |h|, & \text{если} \quad x = 0; \\ \operatorname{Re} \frac{x\overline{h}}{|x|}, & \text{если} \quad x \neq 0. \end{cases} \tag{18.5}$$

Здесь $x, h \in \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{R}$.

***Упражнение* 18.1.** *Докажите формулу* (18.5).

Теорема 18.1. *Для логарифмической нормы справедлива следующая оценка:*

$$||A||_{\sigma \log} = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \operatorname{Re} a_{ii} + (1 - \sigma) p_i + \sigma q_i \right\}, \tag{18.6}$$

$$\textit{где} \;\; p_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \;\; \textit{и} \;\; q_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{18.7}$$

□ По формулам (11.1) и (11.2) нужно оценить $[x, Ax]_\sigma$. Выражение (18.4) при $h = Ax$ нам даёт

$$[x, Ax]_\sigma = ||x||_\sigma^{1-\frac{1}{\sigma}} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{\sigma}-1} \operatorname{Re} \frac{x_i \overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}}{|x_i|} \tag{18.8}$$

(для простоты мы считаем, что все $x_i \neq 0$). При любом фиксированном i имеем

$$\frac{|x_i|^{\frac{1}{\sigma}-1}\ \mathrm{Re}\ \left(x_i\overline{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}\right)}{|x_i|} \le |x_i|^{\frac{1}{\sigma}}\ \mathrm{Re}\ a_{ii} + \sum_{j\ne i} |x_i|^{\frac{1}{\sigma}-1}|\overline{a}_{ij}||\overline{x}_j| =$$

$$= \mathrm{Re}\ a_{ii}\ |x_i|^{\frac{1}{\sigma}} + \sum_{j\ne i} |x_i|^{\frac{1}{\sigma}-1}|a_{ij}|^{1-\sigma}|a_{ij}|^{\sigma}|x_j|^{\frac{\sigma}{\sigma}} \le \qquad (18.9)$$

$$\le \mathrm{Re}\ a_{ii}\ |x_i|^{\frac{1}{\sigma}} + \sum_{j\ne i}\left\{(1-\sigma)|a_{ij}||x_i|^{\frac{1}{\sigma}} + \sigma|a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{\sigma}}\right\}.$$

На последнем этапе рассуждений мы воспользовались неравенством Юнга (1.1). Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{\sigma}-1}\ \mathrm{Re}\ \frac{\left(x_i\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)}{|x_i|} \le \qquad (18.10)$$

$$\le \mathrm{Re}\ a_{ii}\ |x_i|^{\frac{1}{\sigma}} + (1-\sigma)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\ne i}|a_{ij}||x_i|^{\frac{1}{\sigma}} + \sigma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\ne i}|a_{ij}||x_i|^{\frac{1}{\sigma}} =$$

(в последнем случае индексы i и j поменяли местами)

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\mathrm{Re}\ a_{ii} + (1-\sigma)\sum_{j\ne i}|a_{ij}| + \sigma\sum_{j\ne i}|a_{ji}|\right\}|x_i|^{\frac{1}{\sigma}} \le$$

$$\le a\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{\frac{1}{\sigma}} = a||x||_{\sigma}^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Мы обозначили через a правую часть формулы (18.6).

Итак, согласно формуле (18.8)

$$[x, Ax]_{\sigma} \le ||x||_{\sigma}^{1-\frac{1}{\sigma}} a||x||_{\sigma}^{\frac{1}{\sigma}} = a||x||_{\sigma}$$

и оценка (18.6) установлена. ■

Рассмотрим разные случаи для

$$\text{spa}\, A \geq \text{Re}\, a_{ii} - p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

1. $\text{Re}\, a_{ii} = 0$.

$$\text{spa}\, A \geq -p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma} \geq -(1-\sigma)p_i - \sigma q_i.$$

2. $\text{Re}\, a_{ii} < 0$.

$$\begin{gathered} \text{spa}\, A \geq \text{Re}\, a_{ii} - p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma} = -(|\text{Re}\, a_{ii}| + p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}) = \\ = -(|\text{Re}\, a_{ii}|^{1-\sigma} |\text{Re}\, a_{ii}|^{\sigma} + p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}) \geq \\ \geq -(|\text{Re}\, a_{ii} + p_i|)^{1-\sigma} (|\text{Re}\, a_{ii} + q_i|)^{\sigma} \geq \end{gathered}$$

(по неравенству Гёльдера)

$$\geq -\{(1-\sigma)|\text{Re}\, a_{ii}| + \sigma|\text{Re}\, a_{ii}| + (1-\sigma)p_i + \sigma q_i\} =$$

(по неравенству Юнга)

$$= -|\text{Re}\, a_{ii}| - (1-\sigma)p_i - \sigma q_i = \text{Re}\, a_{ii} - (1-\sigma)p_i - \sigma q_i.$$

3. $\text{Re}\, a_{ii} > 0$.

$$\text{spa}\, A \geq \text{Re}\, a_{ii} - p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma} \equiv \mu_i - (\mu_i - \text{Re}\, a_{ii} + p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}) \equiv$$

(здесь μ_i подобрано так, чтобы $\mu_i - \text{Re}\, a_{ii} \geq 0$)

$$\begin{gathered} \equiv \mu_i - \{|\mu_i - \text{Re}\, a_{ii}|^{1-\sigma} |\mu_i - \text{Re}\, a_{ii}|^{\sigma} + p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma}\} \geq \\ \geq \mu_i - (\mu_i - \text{Re}\, a_{ii} + p_i)^{1-\sigma} (\mu_i - \text{Re}\, a_{ii} + q_i)^{\sigma} \geq \end{gathered}$$

(по неравенству Гёльдера)

$$\begin{gathered} \geq \mu_i - (1-\sigma)[\mu_i - \text{Re}\, a_{ii} + p_i] - \sigma[\mu_i - \text{Re}\, a_{ii} + q_i] = \\ = \mu_i - (1-\sigma)[\mu_i - \text{Re}\, a_{ii}] - (1-\sigma)p_i - \sigma[\mu_i - \text{Re}\, a_{ii}] - \sigma q_i = \\ = \mu_i - \mu_i + \text{Re}\, a_{ii} - (1-\sigma)p_i - \sigma q_i = \text{Re}\, a_{ii} - (1-\sigma)p_i - \sigma q_i. \end{gathered}$$

***Упражнение* 18.2.** *Проверьте формулу* (18.6) *в случае, когда некоторые* $x_i = 0$.

ГЛАВА ЧЕТВЁРТАЯ

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

§ 19. Матрицы Гурвица, Ляпунова и Дирихле

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \ \ i = 1, 2, ..., n; \ \ \dot{x} = Ax, \tag{19.1}$$

где x есть n-мерный вектор с вещественными или комплексными компонентами $x_1, x_2, ..., x_n$, а $A = (a_{ij})$ есть произвольная квадратная $n \times n$-матрица с постоянными вещественными или комплексными элементами; точка означает дифференцирование по времени t.

Поведение решений системы (19.1) во многом определяется корнями характеристического уравнения матрицы A

$$L_n(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A) \equiv \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \sigma_n = 0, \tag{19.2}$$

где σ_1, σ_2,..., σ_n – коэффициенты уравнения с постоянными коэффициентами, знаки являются суммами всех главных миноров матрицы A k-го порядка.

Как хорошо известно, решение системы (19.1) может быть записано в виде

$$x(t) = e^{tA} x(0), \tag{19.3}$$

причём матричная экспонента определяется рядом

$$e^{tA} = I + \sum_{k=1}^{+\infty} t^k A^k, \ \ -\infty < t < +\infty. \tag{19.4}$$

Напомним, что нулевое решение системы (19.1) *устойчиво по Ляпунову,* если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\text{из } ||x(0)|| < \delta \text{ вытекает } ||x(t)|| < \varepsilon \text{ при } 0 \leq t < +\infty. \quad (19.5)$$

Если имеет место не только (19.5), но и

$$||x(t)|| \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \quad (19.6)$$

то нулевое решение системы (19.1) называется *асимптотически устойчивым.* Мы скажем, что нулевое решение системы (19.1) *устойчиво по Дирихле,* если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\text{из } ||x(0)|| < \delta \text{ вытекает } ||x(t)|| < \varepsilon \text{ при } -\infty < t < +\infty. \quad (19.7)$$

На языке матричной экспоненты сформулированные нами определения означают, что

$$|e^{tA}| \leq c \text{ при } 0 \leq t < +\infty, \quad (19.8)$$

$$|e^{tA}| \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \quad (19.9)$$

$$|e^{tA}| \leq c \text{ при } -\infty < t < +\infty \quad (19.10)$$

соответственно. Поэтому мы будем говорить, что система (19.1) устойчива по Ляпунову, асимптотически устойчива (по Ляпунову) и устойчива в смысле Дирихле.

Нам удобно дать следующее алгебраическое определение. Рассмотрим квадратную $n \times n$-матрицу A и корни $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$, ..., $\lambda_n(A)$ – полный набор её собственных значений, т. е. корни операторного уравнения (19.2) с учётом их кратности. Матрица A называется *гурвицевой,* если все её собственные значения лежат в открытой левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, т. е.

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \quad (19.11)$$

Матрица A называется *ляпуновской,* или *матрицей Ляпунова,* если все её собственные значения либо лежат в открытой левой полуплоскости, либо на мнимой оси, причём в последнем случае (если они есть) им отвечают только простые элементарные делители

$$\operatorname{Re}\lambda_k < 0 \;\text{ или }\; \operatorname{Re}\lambda_k = 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{19.12}$$

Наконец, матрица A называется *матрицей Дирихле,* если все её собственные значения лежат на мнимой оси (т. е. являются либо нулевыми, либо чисто мнимыми), причём в обоих случаях они имеют лишь простые элементарные делители

$$\operatorname{Re}\lambda_k = 0, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{19.13}$$

Удобство сформулированных определений показывают приводимые ниже теоремы.

Теорема 19.1. *Система* (19.1) *устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда матрица этой системы ляпуновская* (*матрица Ляпунова*).

Теорема 19.2. *Система* (19.1) *асимптотически устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда матрица этой системы гурвицева* (*матрица Гурвица*).

Теорема 19.3. *Система* (19.1) *асимптотически устойчива по Дирихле тогда и только тогда, когда матрица этой системы является матрицей Дирихле.*

Упражнение 19.1. *Докажите теорему* 19.1.

Упражнение 19.2. *Докажите теорему* 19.2.

Упражнение 19.3. *Докажите теорему* 19.3.

Теорема 19.4. *Каждый линейный оператор Ляпунова есть либо оператор Гурвица, либо оператор Дирихле, либо их прямая сумма.*

Упражнение 19.4. *Докажите теорему* 19.4.

Теория линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами принадлежит к числу наиболее разработанных в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Она встречается во всех руководствах (см., например, книги И. Г. Петровского [42, гл. 6, с. 166–212], Л. С. Понтрягина [43, с. 41–123], В. И. Арнольда [3, с. 166–293], А. В. Боровских и А. И. Перова [9, ч. 2, с. 119–197]).

Приведённая классификация матриц предлагается в учебном пособии А. И. Перова и И. Д. Коструб [41, с. 26–33].

В конце параграфа приведём примеры матриц различных типов.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1 \quad - \quad \text{никакая.}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5 - \text{матрица Ляпунова.}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} \quad - \quad \text{матрица Гурвица.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i \quad - \quad \text{матрица Дирихле.}$$

§ 20. Критерий Рауса – Гурвица

Напомним известный критерий Рауса – Гурвица; редкая работа по автоматическому регулированию не содержит ссылки на этот критерий. Доказательство его достаточно сложно и приводится – если в этом возникает необходимость – только в специальных курсах (см. [18, с. 90]).

Итак, рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{x} = Ax, \qquad (20.1)$$

где (a_{ij}) – вещественные или комплексные постоянные коэффициенты. Самая трудоёмкая часть работы по выяснению условий устойчивости этой системы состоит в нахождении характеристического многочлена матрицы $A = (a_{ij})$

$$L_n(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (20.2)$$

Для построения этого многочлена можно воспользоваться методом А. Н. Крылова [45, с. 278–286].

Наша задача заключается в выяснении условий (желательно – необходимых и достаточных), когда все корни λ_1, λ_2, ..., λ_n характеристического многочлена $L_n(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad (20.3)$$

Как известно, многочлен $L_n(\lambda)$ в этом случае называется *гурвицевым.*

Пытаясь решить эту проблему в общем случае, предположим, что a_{ij} – вещественные числа или, чуть более общо, коэффициенты a_1, a_2, ..., a_n характеристического уравнения (20.2) вещественны (так будет, например, если матрица A – комплексная эрмитова матрица с $a_{ji} = \overline{a}_{ij}$).

Построим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad (20.4)$$

и обозначим через d_1, d_2, ..., d_n последовательные главные миноры этой матрицы.

Теорема 20.1 (критерий Рауса – Гурвица). *Для того чтобы корни характеристического уравнения* (20.2) *с вещественными коэффициентами имели отрицательные вещественные части* (20.3) *необходимо и достаточно, чтобы все последовательные главные миноры матрицы* (20.4) *были положительными:*

$$d_1 > 0,\ d_2 > 0,\ ...,\ d_{n-1} > 0,\ d_n = a_n d_{n-1} > 0. \qquad (20.5)$$

Отметим ещё, что необходимость условия гурвицевости многочлена $L_n(\lambda)$ состоит в положительности всех его коэффициентов

$$(a_0 > 0),\ a_1 > 0,\ ...,\ a_{n-1} > 0,\ a_n > 0. \qquad (20.6)$$

Пример. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

и выясним, когда выполнено условие (20.3). Построим матрицу (20.4):

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем её главные миноры: $d_1 = 2 > 0$, $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 > 0$, $d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $d_4 = 1 \cdot d_3 > 0$. Поскольку последовательные главные миноры матрицы положительны, согласно теореме 20.1, все корни характеристического уравнения с вещественными коэффициентами имеют отрицательные вещественные части. Более того, характеристический многочлен является гурвицевым, так как положительны все коэффициенты (выполнена необходимость условия гурвицевости).

§ 21. Применение логарифмической нормы

Мы снова имеем дело с линейной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{x} = Ax, \tag{21.1}$$

в которой a_{ij} – постоянные вещественные или комплексные числа.

Прежде всего выпишем известные оценки спектральной абсциссы spa A матрицы $A = (a_{ij})$ (эти оценки вытекают из локализационных теорем Гершгорина и Островского; они приведены в § 3).

$$\text{spa}A = \begin{cases} \max\limits_i \left\{ \text{Re}a_{ii} + p_i^{1-\sigma} q_i^{\sigma} \right\} \leq \\ \max\limits_i \left\{ (\mu_i + \text{Re } a_{ii} + p_i)^{1-\sigma} (\mu_i + \text{Re}a_{ii} + q_i)^{\sigma} - \mu_i \right\} \leq \\ \max\limits_i \left\{ \text{Re}a_{ii} + (1-\sigma) p_i + \sigma q_i \right\}. \end{cases} \tag{21.2}$$

Здесь: σ – фиксировано, $0 \leq \sigma \leq 1$; μ_i выбрано так, чтобы Re $a_{ii}+$ $+\mu_i \geq 0$; Re a_{ii} – это вещественная часть числа a_{ii} и

$$p_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad q_i = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|. \tag{21.3}$$

При проверке системы (21.1) на устойчивость прежде всего важно знать гурвицева ли она или нет. Для ответа на этот вопрос достаточно убедиться в том, что хотя бы один из максимумов в (21.2) отрицателен (при этом вычисления можно вести достаточно грубо лишь бы не потерять отрицательности максимума). Итак, первое испытание требует

$$\text{spa } A < 0. \tag{21.4}$$

Выпишем подробнее тесты:

0-тест

$$\text{Re } a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{21.5}$$

1-тест

$$\text{Re } a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ji}| < 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{21.6}$$

σ-тест

$$\text{Re } a_{ii} + (1-\sigma)\sum_{j \neq i} |a_{ij}| + \sigma \sum_{j \neq i} |a_{ji}| < 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{21.7}$$

Может случиться так, что ни один из тестов (21.5) и (21.6) не позволяет судить о гурвицевости матрицы. Тогда есть смысл попытаться использовать σ-тест (21.7), построив график прямых $\tau = a_i + (1-\sigma)p_i + \sigma q_i$, $i = 1, 2, ..., n$ ($a_i = \text{Re } a_n$).

Если мы убедимся в том, что матрица A гурвицева, то, как правило, этим дело не заканчивается. Для приложений важно знать точное или приближённое значение спектральной абсциссы. Тут полезна общая оценка

$$\alpha = \text{spa } A \leq ||A||_{\log} = a \ \ (< 0). \tag{21.8}$$

Если норма справа зависит от некоторого параметра (или параметров), то для получения наилучшего результата нужно провести минимизацию по параметру (параметрам). И, возможно, – самое главное – оценка (21.8) позволяет написать

$$||e^{tA}|| \leq e^{ta}, \quad 0 \leq t < +\infty. \tag{21.9}$$

Для гёльдеровой σ-нормы здесь проходит лишь третья строка в (21.2), причём при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ она даёт точное значение логарифмической нормы (см. § 18).

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно найти её собственные значения $\lambda_1 = -6$, $\lambda_{2,3} = (-5 \pm \pm\sqrt{5})/2$. spa $A \approx -1,4$.

Найдём $||A||_{0\log} = a_0$. По формулам (21.5) – по строкам

$$\begin{aligned} -3+1 = -2 &\ < 0; \\ -2+1 = -1 &\ < 0; \\ -6+5 = -1 &\ < 0. \end{aligned}$$

Матрица гурвицева, причём $a_0 = -1$.

Найдём $||A||_{1\log} = a_1$. По формулам (21.6) – по столбцам

$$\begin{array}{rcrl} -3+5 & = & 2 & > 0; \\ -2+2 & = & 0 & = 0; \\ -6+0 & = & -6 & < 0. \end{array}$$

По этому признаку судить о гурвицевости матрицы нельзя ибо $a_1 = = 2 > 0$.

Найдём $||A||_{\sigma\log} = a(\sigma)$. Используем формулы (21.7) и проминимизируем по σ, $0 \le \sigma \le 1$. Имеем

$$\begin{array}{rcl} -3+(1-\sigma)+5\sigma & = & -2+4\sigma; \\ -2+(1-\sigma)+2\sigma & = & -1+\sigma; \\ -6+5(1-\sigma) & = & -1-5\sigma. \end{array}$$

Поэтому

$$\min_{0\le\sigma\le1} \max\{-2+4\sigma, -1+\sigma, -1-5\sigma\} = -1.$$

Минимизация ничего нового не дала: $\alpha = \operatorname{spa} A \le -1$.

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1/2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найдём $||A||_{0\log} = a_0$. По формулам (21.5) – по строкам

$$\begin{aligned} -2+3/2 = -1/2 &\ < 0; \\ -3+3 = 0 &\ = 0; \\ -6+3 = -3 &\ < 0. \end{aligned}$$

Матрица ляпуновская, причём $a_0 = 0$. Найдём $||A||_{1\log} = a_1$. По формулам (21.6) – по столбцам

$$\begin{array}{rcll} -2+4 & = & 2 & > 0; \\ -3+2 & = & -1 & < 0; \\ -6+3/2 & = & -4\frac{1}{2} & < 0. \end{array}$$

Результат отрицательный, так как $a_1 = 2 > 0$.

Прибегнем к σ-тесту (21.7). Имеем

$$\begin{array}{rcl} -2+(1-\sigma)3/2+\sigma 4 & = & -1/2+5/2\sigma; \\ -3+(1-\sigma)3+\sigma 2 & = & -\sigma; \\ -6+5(1-\sigma)3+\sigma 3/2 & = & -3-3/2\sigma. \end{array}$$

Проверка σ-теста показывает, что матрица A гурвицева, причём $a(\sigma) < 0$ при $0 < \sigma < 1/5$; минимум достигается при $\sigma < 1/7$ и он равен $-1/7$.

Ни один из тестов (0-тест и 1-тест) не дал положительного результата при проверке на гурвицевость, а σ-тест выявил гурвицевость при $0 < \sigma < 1/5$. Итак, исследуемая матрица гурвицева, причём $\operatorname{spa} A \le ||A||_{\sigma\log} = -1/7$ (при $\sigma = 1/7$).

§ 22. Оценки Винтнера

Продолжим изучение линейных систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{x} = Ax, \tag{22.1}$$

с постоянными вещественными или комплексными коэффициентами a_{ij}, причём $A = (a_{ij})$.

Мы будем изучать наши задачи в n-мерном пространстве со скалярным произведением и нормой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i, \quad ||x|| = \sqrt{(x, x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}. \tag{22.2}$$

Напомним, что эрмитова сопряжённая матрица A^* определяется равенством $A^* = (\overline{a}_{ji})$ или из $(Ax, y) = (x, A^* y)$, а эрмитова матрица обладает свойством $A^* = A$.

Пусть $x = x(t)$ есть решение системы (22.1). Рассмотрим вещественную положительную функцию

$$u(t) = (x(t), x(t)) \ \ (= ||x(t)||^2) \tag{22.3}$$

(вообще, в пространстве со скалярным произведением удобнее иметь дело не с нормой, а с её квадратом). Согласно формуле (22.1) имеем

$$\dot{u}(t) = (x(t), x(t))^{\bullet} = (\dot{x}(t), x(t)) + (x(t), \dot{x}(t)) = \tag{22.4}$$

$$= (Ax, x) + (x, Ax) = (Ax, x) + (A^* x, x) = ((A + A^*)x, x) = 2(Bx, x),$$

$$\dot{u}(t) = 2(Bx(t), x(t)),$$

где

$$B = \frac{A + A^*}{2}. \tag{22.5}$$

Матрица B – самосопряжённая (эрмитова)

$$B^* = \left(\frac{A + A^*}{2}\right)^* = \frac{A^* + A^{**}}{2} = \frac{A^* + A}{2} = B.$$

Так как матрица B эрмитова, то все её собственные значения вещественны, минимальное из которых обозначим $\lambda_{\min}$, а максимальное через $\lambda_{\max}$. Как известно, в этом случае

$$\lambda_{\min}(x, x) \le (Bx, x) \le \lambda_{\max}(x, x). \tag{22.6}$$

Это – ключевые неравенства в развиваемом нами подходе. Из (22.4) и (22.6) вытекают оценки

$$2\lambda_{\min} u(t) \le \dot{u}(t) \le 2\lambda_{\max} u(t). \tag{22.7}$$

Из написанных нами дифференциальных неравенств вытекают оценки

$$e^{t2\lambda_{\min}}u(0) \le u(t) \le e^{t2\lambda_{\max}}u(0), \quad 0 \le t < +\infty$$

и, как следствие:

$$e^{t\lambda_{\min}}||x(0)|| \le ||x(t)|| \le e^{t\lambda_{\max}}||x(0)||, \quad 0 \le t < +\infty. \tag{22.8}$$

Это и есть оценки, которые впервые в явном виде получил А. Винтнер в 1946 году [12].

Мы видим, что достаточным условием асимптотической устойчивости системы (22.1) является условие $\lambda_{\max}(= \text{spa } B) < 0$, т. е. сопряжённая матрица B должна быть отрицательно определённой: $B < 0$. Для проверки этого условия, которое мы выписали в явном виде

$$\text{spa } B < 0, \tag{22.9}$$

применим *классический критерий Сильвестра*: самосопряжённая матрица B является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда последовательные главные миноры этой матрицы удовлетворяют условиям

$$(-1)^n \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{vmatrix} > 0, \quad p = 1, 2, ..., n. \tag{22.10}$$

Выпишем в явном виде матрицу $B = (b_{ij})$, где

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} + \overline{a}_{ji}}{2}, \quad i, j = 1, 2, ..., n. \tag{22.11}$$

Из (22.11) при $i = j$ имеем $b_{ii} = \text{Re } a_{ii}$. Поэтому

$$\text{spa } B \le \max_i \left\{ \text{Re } a_{ii} + \sum_{j \ne i} \left| \frac{a_{ij} + \overline{a}_{ji}}{2} \right| \right\} < 0 \tag{22.12}$$

есть достаточное условие асимптотической устойчивости системы (22.1).

ГЛАВА ПЯТАЯ

Системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

§ 23. Общая теория

23.1. Матрицант, матрица монодромии, мультипликаторы. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \;\; i = 1, 2, ..., n; \;\; \dot{x} = A(t)x, \tag{23.1}$$

где $a_{ij}(t)$ – вещественные или комплексные измеримые ω-периодические функции

$$a_{ij}(t+\omega) = a_{ij}(t), \;\; A(t+\omega) = A(t), \tag{23.2}$$

суммируемые на отрезке $[0, \omega]$. Здесь ω – фиксированное положительное число, называемое периодом системы (23.1). Почти нет необходимости объяснять, что $A(t) = (a_{ij}(t))$. Столь широкие предположения относительно коэффициентов – прежде всего отказ от непрерывности – вызваны желанием не исключать из рассмотрения системы с кусочно непрерывными или даже с кусочно постоянными коэффициентами.

Решение системы (23.1) понимается в смысле Каратеодори, т. е. это абсолютно непрерывные (а значит, непрерывные) функции, удовлетворяющие всем уравнениям системы (23.1) почти всюду. Впрочем, если коэффициенты рассматриваемой системы – непрерывные функции, то решение состоит из непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих всем уравнениям системы (23.1) всюду.

При изучении системы линейных дифференциальных уравнений (23.1) целесообразен переход к матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = A(t)X, \tag{23.3}$$

решение которого с начальным условием

$$X(0) = I \tag{23.4}$$

называется *матрицантом* и обозначается $U(t)$. Понятие матрицанта можно найти, например, в книге Б. П. Демидовича [18, с. 74]. Если $U(t)$ – матрицант периодической системы (23.1), то матрица $U(\omega)$ называется *матрицей монодромии*, а её собственные значения – *мультипликаторами*. Матрица $U(t)$ при каждом t является невырожденной; более того, при любых t_0 и t_1 справедлива формула

$$\det U(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t_1} \mathrm{tr}\, A(t)dt} \det U(t_0), \tag{23.5}$$

называемая *формулой Остроградского – Лиувилля – Якоби* (иногда из этого перечня одна или две фамилии опускаются). Матрицант периодической системы уравнений обладает следующим важным свойством

$$U(t + k\omega) = U(t)[U(\omega)]^k, \quad k - \text{целое число}. \tag{23.6}$$

Доказательство этого свойства можно найти, скажем, в учебнике Л. С. Понтрягина [43] или А. В. Боровских и А. И. Перова [9]. Настоящей энциклопедией по уравнениям с периодическими коэффициентами является книга В. А. Якубовича и В. М. Старжинского [52].

Если μ – мультипликатор периодической системы (23.1), то она всегда имеет такое нетривиальное решение $x(t)$, что

$$x(t + \omega) = \mu x(t), \quad -\infty < t < +\infty. \tag{23.7}$$

Решение системы (23.1), обладающее свойством (23.7), называется *решением Флоке*.

23.2. Усреднённая система. Поставим в соответствие системе (23.1) с периодическими коэффициентами усреднённую систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{\xi} = C\xi, \tag{23.8}$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} a_{ij}(t)dt, \quad C = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} A(t)dt. \tag{23.9}$$

Здесь число c_{ij} есть среднее значение ω-периодической функции $a_{ij}(t)$, а матрица C есть среднее значение ω-периодической матричной функции $A(t)$.

Нас интересует связь между устойчивостью системы (23.1) с периодическими коэффициентами и устойчивостью усреднённой системы (23.8) с постоянными коэффициентами. Такой период практикуется иногда в теории колебаний (особенно если система содержит малый параметр – см., например, метод Н. Г. Четаева в монографии В. А. Якубовича и В. М. Старжинского [52, с. 89–90]. Матрицант усреднённой системы (23.8) обозначим $V(t)$. Как известно, $V(t) = e^{tC}$. В статье О. И. Авдеевой [1] приведено равенство

$$\det U(\omega) = \det V(\omega), \tag{23.10}$$

подтверждающее близость систем (23.1) и (23.8). Приведём доказательство этого равенства (подчеркнём, что речь идёт о равенстве не самих матриц $U(\omega)$ и $V(\omega)$, а только их определителей). Дважды используем формулу Остроградского – Лиувилля – Якоби (23.5) согласно (23.9) имеем

$$\det U(\omega) = e^{\int\limits_0^{\omega} \operatorname{tr} A(t)dt} = e^{\int\limits_0^{\omega}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(t)dt} = e^{\omega\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} a_{ii}(t)dt} =$$

$$= e^{\omega\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii}} = e^{\omega \operatorname{tr} C} = \det V(\omega),$$

и формула (23.10) установлена.

23.3. Устойчивость. Система (23.1) называется *устойчивой по Ляпунову,* если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\text{из } ||x(0)|| < \delta(\varepsilon) \text{ вытекает } ||x(t)|| < \varepsilon \text{ при } 0 \leq t < +\infty. \tag{23.11}$$

Если имеет место не только (23.11), но и

$$||x(t)|| \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \tag{23.12}$$

то система (23.1) называется *асимптотически устойчивой* (по Ляпунову). Если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\text{из } \; ||x(0)|| < \delta(\varepsilon) \; \text{ вытекает } \; ||x(t)|| < \varepsilon \tag{23.13}$$
$$\text{при } \; -\infty < t < +\infty,$$

то система (23.1) называется *устойчивой по Дирихле* ([44, с. 3]).

Информацию о том имеет ли место устойчивость и, если имеет, то какого типа, полностью даёт матрица монодромии рассматриваемой системы.

Рассмотрим некоторую матрицу V с собственными значениями μ_1, μ_2, ..., μ_n. Мы назовём матрицу V *ляпуновской в дискретном смысле,* если

$$|\mu_i| < 1 \;\text{ или }\; |\mu_i| = 1, \;\; i = 1, 2, ..., n, \tag{23.14}$$

причём в последнем случае им отвечают только простые элементарные делители. Матрицу V назовём *гурвицевой в дискретном смысле,* если

$$|\mu_i| < 1, \;\; i = 1, 2, ..., n, \tag{23.15}$$

(т. е. весь спектр матрицы V лежит внутри единичного круга $|\mu_i| < 1$); такие матрицы называют ещё сжатыми. Наконец, матрица V называется *матрицей Дирихле в дискретном смысле,* если

$$|\mu_i| = 1, \;\; i = 1, 2, ..., n, \tag{23.16}$$

причём им отвечают лишь простые элементарные делители. В этом случае весь спектр матрицы V лежит внутри единичной окружности.

Теорема 23.1. *Для того чтобы система* (23.1) *была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы её матрица монодромии была ляпуновской в дискретном смысле.*

Теорема 23.2. *Для того чтобы система* (23.1) *была асимптотически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы её матрица монодромии была гурвицевой в дискретном смысле.*

Теорема 23.3. *Для того чтобы система* (23.1) *была устойчивой в смысле Дирихле, необходимо и достаточно, чтобы её матрица монодромии была матрицей Дирихле в дискретном смысле.*

§ 24. Оценки Важевского

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{x} = A(t)x, \tag{24.1}$$

с вещественными или комплексными коэффициентами

$$a_{ij}(t + \omega) = a_{ij}(t), \quad A(t + \omega) = A(t). \tag{24.2}$$

Мы будем изучать систему (24.1) в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением и нормой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \quad ||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}. \tag{24.3}$$

Напомним, что эрмитова сопряжённая матрица A^* определяется формулой $A^*(t) = (\overline{a}_{ji})(t)$ или из $(A(t)x, y) = (x, A^*(t)y)$, а эрмитова матрица обладает свойством $B^*(t) = B(t)$.

Пусть $x = x(t)$ есть нетривиальное решение системы (24.1). Рассмотрим вещественную положительную абсолютно непрерывную функцию

$$u(t) = (x(t), x(t)) \ \ (= ||x(t)||^2). \tag{24.4}$$

Согласно (24.1) имеем

$$\dot{u}(t) = (\dot{x}(t), x(t)) + (x(t), \dot{x}(t)) =$$

$$= (A(t)x(t), x(t)) + (x(t), A(t)x(t)) = \tag{24.5}$$

$$= (A(t)x(t), x(t)) + (A^*(t)x(t), x(t)) =$$

$$= ((A(t) + A^*(t))x(t), x(t)) = 2(B(t)x(t), x(t)),$$

где

$$B(t) = \frac{A(t) + A^*(t)}{2}. \tag{24.6}$$

При каждом t матрица $B(t)$ – самосопряжённая (эрмитова), что непосредственно проверяется. Так как матрица $B(t)$ эрмитова, то все её собственные значения вещественные, минимальное из которых обозначим $\lambda_{\min}(t)$, а максимальное – через $\lambda_{\max}(t)$; эти функции являются вещественными измеримыми ω-периодическими, суммируемыми на отрезке $[0, \omega]$. Как известно, в этом случае

$$\lambda_{\min}(t)(x, x) \leq (B(t)x, x) \leq \lambda_{\max}(t)(x, x). \tag{24.7}$$

Это ключевые неравенства в развиваемом нами подходе. Из (24.5) и (24.7) вытекают оценки

$$2\lambda_{\min}(t)u(t) \leq \dot{u}(t) \leq 2\lambda_{\max}(t)u(t). \tag{24.8}$$

Из написанных нами дифференциальных неравенств вытекают оценки

$$e^{2\int\limits_0^t \lambda_{\min}(s)ds} u(0) \leq u(t) \leq e^{2\int\limits_0^t \lambda_{\max}(s)ds} u(0), \quad (0 \leq t < +\infty)$$

и, как следствие (24.4),

$$e^{\int\limits_0^t \lambda_{\min}(s)ds} ||x(0)|| \leq ||x(t)|| \leq e^{\int\limits_0^t \lambda_{\max}(s)ds} ||x(0)||. \tag{24.9}$$

Это и есть оценки, которые мы связываем с польского математика Тадеуша Важевского [11] (1948).

Оценки Важевского показывают, что если система (24.1) устойчива по Ляпунову, то

$$\int_0^\omega \lambda_{\min}(t)dt \leq 0 \tag{24.10}$$

(необходимое условие). Если же выполнено условие

$$\int_0^\omega \lambda_{\max}(t)dt \leq 0, \tag{24.11}$$

то система (24.1) устойчива по Ляпунову (достаточное условие). Совершенно ясно, что аналогичная картина имеет место и в случае асимптотической устойчивости, только знак равенства нужно исключить.

Теорема 24.1. *Если система* (24.1) *устойчива по Ляпунову, то выполнено условие* (24.10). *Если выполнено более сильное условие* (24.11), *то система* (24.1) *устойчива по Ляпунову.*

Теорема 24.2. *Если система* (24.1) *асимптотически устойчива, то выполнено условие* (24.10) *со знаком строгого неравенства. Наоборот, если выполнено более жёсткое условие* (24.11) *со знаком неравенства, то система* (24.1) *асимптотически устойчива.*

Условиям (24.10) и (24.11) можно придать следующий характер. Так как $\lambda_{\max}(t) = \operatorname{spa} B(t)$, то из оценки при $\sigma = 1/2$ получаем

$$\lambda_{\max}(t) \leq \max_i \left\{ \operatorname{Re} a_{ii}(t) + \sum_{j\neq i} \left| \frac{a_{ij}(t) + \overline{a}_{ji}(t)}{2} \right| \right\}. \tag{24.12}$$

Аналогично

$$\lambda_{\min}(t) \geq \min_i \left\{ \operatorname{Re} a_{ii}(t) - \sum_{j\neq i} \left| \frac{a_{ij}(t) + \overline{a}_{ji}(t)}{2} \right| \right\}. \tag{24.13}$$

Эти оценки уточняют оценки, приведённые в книге Б. П. Демидовича [18, с. 225–226, упр. 5], а также перенос их на комплексную систему О. И. Авдеева [1]. Упомянутые нами оценки имеют вид

$$\lambda_{\max}(t) \leq \max_i \left\{ \mathrm{Re}\, a_{ii}(t) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)| \right\}, \tag{24.14}$$

Аналогично

$$\lambda_{\min}(t) \geq \min_i \left\{ \mathrm{Re}\, a_{ii}(t) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |a_{ij}(t)| + |a_{ji}(t)| \right\}. \tag{24.15}$$

Вернёмся к оценкам (24.12) и (24.13). Они показывают, что

$$a_{ij}(t) + \overline{a}_{ji}(t) = 0 \ \text{ при } \ i \neq j, \tag{24.16}$$

то оценки эти принимают вид

$$\lambda_{\max}(t) \leq \max_i \mathrm{Re}\, a_{ii}(t), \tag{24.17}$$

$$\lambda_{\min}(t) \geq \min_i \mathrm{Re}\, a_{ii}(t). \tag{24.18}$$

Пример. Движение пространственного гирогоризонткомпаса (его малых колебаний) описывается системой (24.1) с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 & -\Omega(t) \\ -\omega_0 & 0 & \Omega(t) & 0 \\ 0 & -\Omega(t) & 0 & -\omega_0 \\ \Omega(t) & 0 & \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{24.19}$$

где ω_0 есть некоторая постоянная, а $\Omega(t)$ – достаточно произвольная ограниченная гладкая функция. Так как матрица $A(t)$ косоэрмитова, точнее кососимметрическая, то матрицант при каждом t есть унитарная (точнее, ортогональная) матрица.

Система (24.19) устойчива по Дирихле (см. работу В. Р. Носова [31, с. 34]).

§ 25. Метод логарифмической нормы

Мы продолжаем изучение линейных систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{x} = A(t)x, \tag{25.1}$$

с вещественными или комплексными измеримыми ω-периодическими коэффициентами

$$a_{ij}(t+\omega) = a_{ij}(t), \quad A(t+\omega) = A(t), \tag{25.2}$$

суммируемыми на отрезке $[0, \omega]$.

В этом параграфе мы сосредоточим всё своё внимание на условиях асимптотической устойчивости системы (25.1) как необходимых, так и – в бóльшей степени – достаточных.

Пусть система (25.1) асимптотически устойчива. Тогда её матрица монодромии в силу теоремы 24.2 является устойчивой, т. е.

$$\operatorname{spr} U(\omega) < 1. \tag{25.3}$$

Так как $\det U(\omega) = \mu_1\mu_2...\mu_n$, где выписаны мультипликаторы системы (25.1), то в силу (25.3) $|\mu_i| < 1$ при $i = 1, 2, ..., n$, и, как следствие,

$$|\det U(\omega)| < 1. \tag{25.4}$$

Согласно формуле Лиувилля – Остроградского – Якоби (23.5)

$$\det U(\omega) = e^{\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)dt} \det U(0),$$

а так как в силу (25.4)

$$\left| e^{\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t)dt} \right| < 1,$$

то

$$\int_0^\omega \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re} a_{ii}(t)dt < 0. \tag{25.5}$$

Теорема 25.1. *Если система* (25.1) *асимптотически устойчива, то выполнено условие* (25.5).

Отметим, что при $n = 1$ условие (25.5) является и достаточным.

Упражнение 25.1. *Докажите детально теорему* 25.1.

Упражнение 25.2. *Пусть* $z = x + iy$ *комплексное число* (*декартова форма*). *Проверить, что* $|e^z| < 1$ *тогда и только тогда, когда* $x < 0$.

Перейдём к получению достаточных условий асимптотической устойчивости. Пусть в n-мерном фазовом пространстве введена какая-то норма. Выясним, когда норма матрицы монодромии меньше единицы

$$||U(\omega)|| < 1 \tag{25.6}$$

(сравни с условием (25.3)). Разобъём отрезок $[0, \omega]$ на части точками $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = \omega$ и заменим систему (25.1) на каждом участке (t_{i-1}, t_i) системой с постоянными коэффициентами $B_i = (1/(t_i - t_{i-1})) \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} A(t)dt$, $i = 1, 2, ..., N$. Запишем матрицу монодромии

$$U(\omega) \sim e^{\Delta t_N B_N} ... e^{\Delta t_2 B_2} e^{\Delta t_1 B_1} \tag{25.7}$$

(частное произведение при построении мультипликативного интеграла). Имеем

$$||U(\omega)|| \leq e^{\Delta t_N ||B_N||_{\log}} ... e^{\Delta t_2 ||B_2||_{\log}} e^{\Delta t_1 ||B_1||_{\log}}$$

и так как

$$||B_i||_{\log} = \left|\left| \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} A(t)dt \right|\right|_{\log} \leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} ||A(t)||_{\log} dt,$$

то $||U(\omega)|| \le e^{\sum\limits_{i=1}^{N}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}||A(t)||_{\log}}dt$, и при $N \to \infty$ имеем

$$||U(\omega)|| \le e^{\int\limits_0^{\omega}||A(t)||_{\log}}dt. \tag{25.8}$$

Требование (25.6) заведомо будет выполнено, если

$$\int\limits_0^{\omega} ||A(t)||_{\log}\, dt < 0. \tag{25.9}$$

Теорема 25.2. *Если выполнено условие* (25.9), *то периодическая система* (25.1) *будет асимптотически устойчивой.*

Упражнение 25.3. *Покажите, что числовая функция* $||A(t)||_{\log}$ *– вещественная измеримая* ω*-периодическая на отрезке* $[0, \omega]$, *причём*

$$\int\limits_0^{\omega} |\;||A(t)||_{\log}|dt \le \int\limits_0^{\omega} ||A(t)||dt. \tag{25.9}$$

Упражнение 25.4. *Докажите аккуратно теорему* 25.2.

Достаточность условия (25.9) – впечатляющий итог развитой нами теории логарифмической нормы.

Пример. Пусть $n = 2$ и

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & (-\mu + 2\mu\sin t)x_1 + \mu x_2, \\ \dot{x}_2 & = & \mu x_1 - x_2, \end{array}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -\mu + 2\mu \sin t & \mu \\ \mu & -1 \end{pmatrix},$$

где μ – малый параметр. Исследуем эту систему на асимптотическую устойчивость. Необходимое условие (25.5) принимает вид $-(1+\mu) <$ < 0. Откуда следует, что $\mu > -1$. Найдём логарифмическую норму $||A(t)||_{\log}$; имеем

$$||A(t)||_{\log} = \max\{2\mu \sin t,\; -1 + \mu\} = 2\mu \sin t.$$

Если $-2\mu \geq -1+\mu$, т. е. $0<\mu\leq 1/3$. Итак, при $0<\mu<1/3$

$$\int\limits_0^{2\pi} ||A(t)||_{\log} dt = 0,$$

и по теореме 25.2 имеет место устойчивость. АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОКА НЕТ!

Матрица $A(t)$ при каждом t сопряжённая $A^*(t) = A(t)$. Вычислим её собственные значения

$$L_2(\lambda) \equiv \lambda^2 + (1+\mu-2\mu\sin t)\lambda + \mu - 2\mu\sin t - \mu^2 = 0.$$

Имеем

$$\lambda_{\max}(t) = \mu\sin t - \frac{1+\mu}{2} + \sqrt{\left(\mu\sin t - \frac{1+\mu}{2}\right)^2 - \mu + 2\mu\sin t + \mu^2}.$$

Упростим подкоренное выражение

$$\mu^2\sin^2 t - (1+\mu)\mu\sin t + \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{4} - \mu + 2\mu\sin t + \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \mu\left(-\sin t + \frac{1}{2} - 1 + 2\sin t\right) + \mu^2\left(\sin^2 t - \sin t + \frac{1}{4} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \mu\left(\sin t - \frac{1}{2}\right) + \mu^2\left(\sin^2 t - \sin t + \frac{5}{4}\right).$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \lambda_{\max}(t) dt < 0.$$

§ 26. Метод логарифмической нормы (продолжение)

Рассмотрим систему (25.1) при выполнении условий периодичности (25.2). Выпишем достаточное условие асимптотической устойчивости этой системы

$$\int\limits_0^{\omega} ||A(t)||_{\log} dt < 0. \tag{26.1}$$

Так как всегда

$$\mathrm{spa}\, A(t) \leq ||A(t)||_{\log},$$

то

$$\int\limits_0^{\omega} \mathrm{spa}\, A(t) dt \leq \int\limits_0^{\omega} ||A(t)||_{\log} dt,$$

и из (26.1) с необходимостью вытекает

$$\int\limits_0^{\omega} \mathrm{spa}\, A(t) dt < 0. \tag{26.2}$$

Обсудим это условие. Во-первых, оно не зависит от вектора нормы в фазовом пространстве, и в этом смысле весьма привлекательно. Во-вторых, оно не является, к большому сожалению, достаточным для асимптотической устойчивости, как в этом можно убедиться, рассматривая систему с кусочно-постоянными коэффициентами

$$A(t) = \begin{cases} A & \text{при} \quad 0 < t < h \\ B & \text{при} \quad h < t < \omega \end{cases} \tag{26.3}$$

(система Мейслера), где A и B – гурвицевы матрицы.

Однако, если рассмотреть случай Лаппа – Данилевского (см. [18, с. 117–119]),

$$A(t)A(s) = A(s)A(t), \tag{26.4}$$

то ситуация резко ухудшается. Дело в том, что в этом случае матрицант имеет явный вид

$$U(t) = e^{\int\limits_0^t A(s)ds}, \tag{26.5}$$

и, как следствие, матрица монодромии равна

$$U(\omega) = e^{\int\limits_0^\omega A(t)dt}. \tag{26.6}$$

Так как

$$\operatorname{spr} U(\omega) = e^{\operatorname{spa}\left(\int\limits_0^\omega A(t)dt\right)}, \tag{26.7}$$

то в силу неравенства

$$\operatorname{spa}\left(\int\limits_0^\omega A(t)dt\right) \leq \int\limits_0^\omega \operatorname{spa} A(t)dt, \tag{26.8}$$

$$\operatorname{spr} U(\omega) \leq e^{\int\limits_0^\omega \operatorname{spa} A(t)dt}. \tag{26.9}$$

В этом случае условие (26.2) является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (25.1).

Упражнение 26.1. *Докажите формулу* (26.7).
(*Указание: если* $U = e^A$, *то* $\operatorname{sp} U = e^{\operatorname{sp} A}$).

Упражнение 26.2. *Проверить неравенство* (26.8).
(*Указание: пусть* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = \omega$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., N$; *по свойствам спектральной абсциссы* $\operatorname{spa}\left(\sum\limits_{i=1}^N A(t_i)\Delta t_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^N \operatorname{spa}\ (A(t_i)\Delta t_i) = \sum\limits_{i=1}^N \operatorname{spa}\ (A(t_i))\,\Delta t_i$).

Трудности, возникающие при отказе от свойства перестановочности (26.4), хорошо иллюстрирует формула Хаусдорфа – Кемпбелла – Дынкина, имеющая прямое отношение к уравнениям Мейснера (см. (26.3)):

$$\ln(e^a e^b) = a + b + \frac{1}{2}(ab - ba) + \dots\,. \tag{26.10}$$

В случае (26.3) имеем

$$U(\omega) = e^{(\omega-h)B} e^{hA}.$$

Рассмотрим систему (25.1) с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\mu + 2\mu\sin t & \mu \\ \mu & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдём её спектральную абсциссу spa $A(t;\mu)$:

$$\lambda^2 + (1 + \mu - 2\mu\sin t)\lambda + (\mu - 2\mu\sin t) - \mu^2 = 0.$$

Имеем

$$\lambda_\pm(t) = \mu\sin t - \frac{1+\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\mu\sin t - \frac{1+\mu}{2}\right)^2 + \mu^2 - \mu(1 - 2\sin t)}.$$

Так как spa $A(t;\mu) = \lambda_+(t)$, то условие (26.3) имеет вид

$$\int\limits_0^\omega \lambda_+(t)dt < 0.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t+\omega) = A(t) \tag{0}$$

с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} -9 & 12\sin t \\ 2\cos t & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $n = 2$, $\omega = 2n$. Матрица C мажорирует матрицу $A(t)$ в том смысле, что Re $a_{ii}(t) \le c_{ii}$ $|a_{ij}(t)| \le c_{ij}$ при $i \ne j$. Матрица (внедиагонально положительная) гурвицева:

$$-9 < 0,\ -3 < 0;\ \ (-9)(-3) - 2 \cdot 12 = 27 - 24 = 3 > 0.$$

Так как имеет место следующее неравенство

$$|U(t)| \leq e^{tC}, \;\; 0 \leq t < +\infty, \tag{2}$$

то система (1) асимптотически устойчива. Найдём оценки:

$$\lambda^2 + 12\lambda + 3 = 0, \;\; \lambda_{\pm} = -6 \pm \sqrt{36-3} = -6 \pm \sqrt{33}. \tag{3}$$

Это даёт оценку

$$\alpha \leq -6 + \sqrt{33} \approx -0,2554. \tag{4}$$

Итак, из других соображений система (1) асимптотически устойчива. А что даёт метод логарифмической нормы?

$$||A(t)||_{0\log} = \max\{-9+12|\sin t|, \; -3+2\cos t|\} = -9+12|\sin t|. \tag{5}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} |\sin t| dt = 2\int\limits_0^{2\pi} \sin t = 2 - \cos t|_0^{\pi} = 2(1+1) = 4,$$

$$-9 \cdot 2\pi + 12 \cdot 4 = -18\pi + 48 \approx -54 + 48 \approx -6 < 0.$$

Итак

$$\int\limits_0^{2\pi} ||A(t)||_{0\log} dt \approx -6 < 0 \tag{6}$$

и система (1) асимптотически устойчива.

Рассмотрим систему (0) с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4\sin t \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cos t & -6 \end{pmatrix}, C(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4|\sin t| \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & |\cos t| & -6 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$$||C(t)||_{0\log} = \max\{-3+4|\sin t|, \; -1; \; -6+\cos t|\} = \tag{8}$$

$$= \max\{-3+4|\sin t|, \; -1\}.$$

$$\begin{array}{ll} |\sin t| < \frac{1}{2} & \max = -1 \\ |\sin t| > \frac{1}{2} & \max = -3 + 4|\sin t| \end{array}$$

Критерий (2) также проходит:

$$-1(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3},$$

$$\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin t dt = -\cos t|_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} < 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} ||A(t)||_{0\log} dt < 0.$$

Рассмотрим систему (0) с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} -9 & 1,2\cos t \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -9 & 1,2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Внедиагонально неотрицательная (внедиагонально положительная) матрица C гурвицевой не является: $\det C = 9 - 9,6 \approx -0,6 < 0$.

Подсчитаем

$$\int\limits_0^{2\pi} ||A(t)||_{1\log} dt. \tag{10}$$

Имеем $||A(t)||_{1\log} = \max\{-1;\ -1 + 1,2|\cos t|\} = -1 + 1,2|\cos t|$.

$$\int\limits_0^{2\pi} (-1 + 1,2|\cos t|) dt = -2\pi + 1,2 \cdot 4 = -6,28 + 4,8 = -1,48 < 0$$

и по критерию логарифмической нормы рассматриваемая система асимптотически устойчива.

Пример. Рассмотрим систему с матрицей

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}. \tag{11}$$

$$\dot{z} = (a(t) + ib(t))z, \quad z = x + iy \tag{12}$$

$$\dot{x} + i\dot{y} = (a(t) + ib(t))(x + iy)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = a(t)x - b(t)y \\ \dot{y} = b(t)x + a(t)y \end{array}\right\} \ a(t) \equiv \cos\omega t, \ b(t) = -\sin\omega t,$$

$$a(t) + ib(t) = e^{-i\omega t}.$$

Система (11) эквивалентна уравнению (12)с $n = 1$.

$$\dot{z} = e^{-i\omega t} z.$$

$$\int\limits_0^t e^{-i\omega s} ds = \frac{e^{-i\omega s}}{-i\omega}\Big|_0^t = \frac{e^{-i\omega t} - 1}{-i\omega}, \ \omega \neq 0,$$

$$z(t) = e^{\frac{e^{-i\omega t} - 1}{-i\omega}} z(0) \ (\omega \neq 0).$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ

По книге М. А. Красносельского «Положительные решения операторных уравнений»

§ 27. Существование положительных периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Общая теория, развитая в вышеуказанной книге, может быть применена в двух планах к исследованию задачи о периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Во-первых, можно пытаться в фазовом пространстве находить конусы, которые инвариантны по отношению к сдвигам по траекториям системы. Если далее удастся показать, что при сдвиге, соответствующем изменению времени на величину периода правых частей, есть неподвижная точка, то отсюда можно сделать вывод о наличии периодических, решений. Второй путь основан на переходе от системы дифференциальных уравнений к интегральным или интегро-функциональным уравнениям, решения которых соответствуют периодическим решениям системы дифференциальных уравнений. Система интегральных или интегро-функциональных уравнений рассматривается как операторное уравнение $\varphi = A\varphi$ в некотором банаховом пространстве E. Если удается найти в E инвариантный для A конус K, то можно пытаться при помощи общих принципов доказывать наличие неподвижных точек у оператора A, исследовать зависимость неподвижных точек от различных параметров и т. д. Условия, при которых есть неподвижные точки у оператора A, являются одновременно условиями существования периодических решений у систем дифференциальных уравнений. Изучим первый из указанных способов.

27.1. Принцип Пуанкаре. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, ..., x_n). \end{cases} \tag{27.0}$$

Будем считать, что правые части определены при всех значениях переменных $-\infty < t, x_1, ..., x_n < \infty$ Далее будем предполагать, что правые части непрерывны по совокупности переменных и обладают свойствами, обеспечивающими единственность решения задачи Коши для системы (27.0). В дальнейшем систему (27.0) будем записывать в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{27.1}$$

Уравнение (27.1) рассматривается в n-мерном пространстве E^n, в котором норму определим равенством

$$\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|. \tag{27.2}$$

Мы рассматриваем вопрос о существовании у системы (27.0) периодических решений заданного периода ω. Естественно, что правые части также предполагаются периодическими по t:

$$f_i(t + \omega, x_1, ..., x_n) \equiv f_i(t, x_1, ..., x_n) \ (i = 1, ..., n). \tag{27.3}$$

Для доказательства существования периодических решений в ряде случаев удается воспользоваться следующим геометрическим принципом Пуанкаре. Допустим, что каждое решение системы (27.1) может быть продолжено на весь замкнутый промежуток $0 \le t \le \infty$ (следует иметь в виду, что это допущение является существенным ограничением). По каждой точке $x_0 \in E^n$ построим решение $x = x(t, x_0)$ системы (27.1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(0, x_0) = x_0. \tag{27.4}$$

Определим оператор A равенством

$$Ax_0 = x(\omega, x_0). \tag{27.5}$$

Если окажется, что оператор A имеет неподвижную точку x^*, то это означает, что у системы (27.1) есть решение $x^*(t)$, удовлетворяющее условию $x^*(\omega) = x^*(0) = x^*$. Из периодичности по t правых частей системы вытекает, что $x^*(t)$ можно по периодичности продолжить на все значения t и это продолжение будет решением системы (27.1). Иначе говоря, из существования неподвижной точки у оператора (27.5) вытекает существование периодического решения у системы (27.1). В ряде случаев оператор (27.5) удобно рассматривать не на всем пространстве E^n, а на некотором множестве $T \subset E$. Ниже роль этого множества T будет играть конус K векторов с неотрицательными координатами. Если нельзя гарантировать продолжимость всех решений системы (27.1) на промежуток $[0, \omega]$, то иногда удается построить новую систему

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x). \tag{27.6}$$

решения которой продолжимы на $[0, \omega]$, причём все периодические решения новой системы являются одновременно периодическими решениями системы (27.1). Для доказательства существования периодических решений у системы (27.6) уже можно применить изложенный выше принцип Пуанкаре.

27.2. Существование неотрицательного периодического решения. Потребуем дополнительно, чтобы каждая функция $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ удовлетворяла условию

$$f_i(t, x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \geq 0 \ \ (x_j \geq 0 \text{ при } j \neq i). \tag{27.7}$$

Из этого условия вытекает, что при движении по траекториям системы (27.1) ни одна точка не может выйти из конуса K. Чтобы не ссылаться на теоремы о дифференциальных неравенствах, приведем прямое доказательство этого факта. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n) + \varepsilon, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, ..., x_n) + \varepsilon, \end{cases} \tag{27.8}$$

где ε – фиксированное положительное число. Траектории системы (27.8) из конуса K не выходят, так как в каждой точке пересечения траектории с границей конуса те координаты, которые равны нулю, строго возрастают. Из непрерывной зависимости решений системы (27.8) от параметра ε и из замкнутости конуса вытекает, что решения системы (27.1) также не выходят из конуса.

Пусть $\Phi(t, x_1, ..., x_n)$ – непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x_i \geq 0,\ \|x\| \to \infty} \Phi(t, x_1, ..., x_n) = \infty, \tag{27.9}$$

и такая, что её поверхности уровня выпуклы. Удобно считать, что градиент функции $\Phi(t, x_1, ..., x_n)$ не обращается в нуль при достаточно больших значениях $|x_1| + \ldots + |x_n|$.

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t, x_1, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(t, x_1, ..., x_n) \leq 0, \tag{27.10}$$

если $x_1, ..., x_n \geq 0$ и

$$x_1 + ... + x_n \geq R_0,$$

где R_0 – некоторое положительное число. Тогда каждое решение системы (27.1), удовлетворяющее начальному условию из конуса K, будет ограниченным и, следовательно, будет определено при всех положительных t. Пусть норма всех точек x, лежащих на поверхности

$$\Phi(t, x_1, ..., x_n) = \Phi_0,$$

больше чем R_0 – такое Φ_0 можно выбрать в силу (27.9). Обозначим через T множество тех точек конуса K, на которых значения функции $\Phi(t, x_1, ..., x_n)$ не превышают Φ_0.

Каждая траектория системы (27.1)не выходит из области T. Поэтому оператор (27.5) преобразует T в себя. Множество T ограничено, выпукло и замкнуто. Из принципа неподвижной точки Брауэра (обобщением которого является применявшийся выше принцип Шаудера) вытекает, что A имеет по крайней мере одну неподвижную точку на T.

Таким образом, из условий (27.7) и (27.10) вытекает существование по крайней мере одного периодического решения системы (27.1), лежащего в конусе K. В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$\Phi(t, x_1, ..., x_n) = \frac{(x_1^2 + ... + x_n^2)}{2}. \tag{27.11}$$

Тогда условия существования периодических решений имеют следующий вид.

Теорема 27.1. *Пусть правые части системы* (27.1) *периодичны по t с периодом ω. Пусть выполнены условия* (27.7). *Пусть, наконец,*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t, x_1, ..., x_n) \leq 0, \tag{27.12}$$

если сумма $x_1 + ... + x_n$ $(x_j \geq 0)$ достаточно велика.

Тогда система (27.1) *имеет по крайней мере одно неотрицательное периодическое решение*

$$x_i(t) \geq 0, \ x_i(t + \omega) \equiv x_i(t) \ \ (i = 1, ..., n). \tag{27.13}$$

Рассуждения настоящего пункта без труда переносятся на случай более широких классов функций $\Phi(t, x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющих условию (27.9). Выбор различных функционалов приводит к различным условиям типа (27.12). В частности, условие (27.12) можно заменить неравенством

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} f_i(t, x_1, ..., x_n) \leq 0, \tag{27.14}$$

где α – любое фиксированное число из промежутка $(-1, \infty)$.

27.3. Постановка задачи о существовании положительного периодического решения. Далее мы будем предполагать:

$$f_i(t, 0, ..., 0) \equiv 0 \ \ (i = 1, ..., n). \qquad (27.15)$$

В этом случае система (27.1) имеет очевидное нулевое периодическое решение. Нас будет интересовать вопрос о существовании второго периодического решения в конусе. Условия типа (27.12) или (27.14), как мы уже указывали, обеспечивают продолжимость всех решений системы (27.1) с начальными условиями из конуса K на все значения $t \geq 0$. Поэтому оператор A определен на всем конусе K и преобразует его в себя. Предположение (27.15) означает, что $A\theta = \theta$. Для доказательства существования ненулевых неподвижных точек у оператора A можно применять следующие теоремы.

Теорема 27.2. *Пусть положительный оператор A ($A\theta = \theta$) имеет сильную производную Фреше $A'(\theta)$ и сильную асимптотическую производную $A'(\infty)$ по конусу. Пусть спектр оператора $A'(\infty)$ лежит в круге $|\lambda| \leq \rho$, где $\rho < 1$. Пусть оператор $A'(\theta)$ имеет в K собственный вектор h_0,*

$$A'(\theta)h_0 = \lambda_0 h_0,$$

причем $\lambda_0 > 1$ и $A'(\theta)$ не имеет в KK собственных векторов, которым отвечает собственное значение, равное 1.

Тогда для существования у оператора A в конусе K по крайней мере одной ненулевой неподвижной точки достаточно выполнения одного из следующих условий:

(а) оператор A вполне непрерывен,

(б) оператор A слабо непрерывен: пространство E слабо полно, единичный шар в E слабо компактен, конус K допускает оштукатуривание.

Приведём ряд теорем из предыдущих глав книги [22].

Теорема. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A является сжатием конуса.*

Тогда оператор A имеет на K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Теорема. *Пусть пространство E слабо полно и единичный шар в E слабо компактен. Пусть конус K допускает оштукатуривание.*

Пусть положительный слабо непрерывный оператор A является сжатием конуса.

Тогда оператор A имеет на K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Теорема. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A является растяжением конуса.*

Тогда оператор A имеет на K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Теорема. *Пусть пространство E слабо полно, единичный шар слабо компактен, конус K допускает оштукатуривание. Пусть слабо непрерывный оператор A является растяжением конуса.*

Тогда оператор A имеет на K по крайней мере одну неподвижную точку.

Теорема. *Пусть оператор $A'(\theta)$ не имеет позитивных собственных значений, превосходящих или равных 1. Пусть оператор $A'(\infty)$ имеет собственный вектор $g_0 \in K$:*

$$A'(\infty)g_0 = \lambda_\infty g_0,$$

где $\lambda_\infty > 1$ и $A'(\infty)$ не имеет позитивных собственных значений, равных 1.

Тогда оператор A имеет на K по крайней мере одну неподвижную ненулевую точку.

Из условия (27.12) или из аналогичных условий либо непосредственно вытекает, что $Ax \geq x$ при $x \in K$ и при достаточно больших значениях $\|x\|$, либо вытекает, что оператор A на элементах с большой нормой можно переопределить так, чтобы у него не появились новые неподвижные точки и чтобы переопределенный оператор $\widetilde{A}$ удовлетворял условию $\widetilde{A}x \geq x$ на элементах $x \in K$ с достаточно большой нормой. Поэтому условия существования периодических решений можно получить следующим образом: найти производную $A'(\theta)$ оператора A и потребовать, чтобы оператор $A'(\theta)$ имел в конусе K единственный собственный вектор, которому соответствует собственное значение, большее чем 1. Оказывается, что оператор $A'(\theta)$ может быть построен решением некоторой линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

27.4. О линейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = b_{11}(t)x_1 + ... + b_{1n}(t)x_n + h_1 t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = b_{n1}(t)x_1 + ... + b_{nn}(t)x_n + h_n t, \end{cases} \tag{27.16}$$

которую запишем в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x + h(t). \tag{27.17}$$

Функции $b_{ij}(t)$ и $h_i(t)$ будем предполагать непрерывными.

При построении и исследовании решений системы (27.16) важную роль играет так называемый *матрицант* $U(t,s)$, определяемый равенством

$$U(t,s) = \int\limits_s^t B(t_1)dt_1 + \int\limits_s^t B(t_2)\int\limits_s^{t_2} B(t_1)dt_1 dt_2 + ... \tag{27.18}$$

который является при фиксированных t и s линейным оператором, так как ряд (27.18) сходится по норме операторов равномерно относительно t и s из любых конечных промежутков.

Решение линейного однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x, \tag{27.19}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(s) = x_0, \tag{27.20}$$

можно записать в виде

$$x(t) = U(t,s)x_0. \tag{27.21}$$

Решение неоднородного уравнения (27.17), удовлетворяющее начальному условию (27.20), записывается в виде

$$x(t) = U(t,s)x_0 + \int\limits_s^t U(t,\tau)h(\tau)d\tau. \tag{27.22}$$

Обе последние формулы проверяются непосредственным дифференцированием, если учесть равенства

$$U(t,t) = I, \;\; U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s).$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $b_{ij}(t)$ системы (27.16) периодичны по t с периодом ω. Для этого

частного случая матрицу

$$U = U(\omega, 0)$$

называют *матрицей монодромии.*

Введём обозначения

$$\max_{0\le t\le\omega} \|B(t)\| = b_0 \;\text{ и }\; \max_{0\le t,\, s\le\omega} \|U(t,s)\| = b_1.$$

Тогда из (27.22) вытекает оценка

$$\|x(t)\| \le b_1\|x_0\| + b_1\omega \max_{0\le\tau\le\omega} \|h(\tau)\| \;\; (0 \le t \le \omega). \tag{27.23}$$

Ниже будут рассмотрены матрицанты таких линейных систем, коэффициенты которых удовлетворяют дополнительному условию:

$$b_{ij}(t) \ge 0 \;\; (0 \le t \le \omega, \;\; i,j = 1,...,n, \;\; i \ne j). \tag{27.24}$$

Как нам уже известно, решения однородной системы (27.19) при условии (27.24) не выходят из конуса K. Значит, матрицант является оператором, который оставляет конус инвариантным. Заметим, что непосредственно из вида (27.18) матрицанта $U(t,s)$ заключение об инвариантности конуса сделать затруднительно, так как диагональные элементы $b_{ii}(t)$ не предполагаются положительными.

Теорема 27.3. *Если выполнены условия* (27.24), *то матрица монодромии имеет по крайней мере одно неотрицательное собственное значение. Этому собственному значению λ_0 соответствует собственный вектор с неотрицательными координатами.*

Если функции $b_{ij}(t)$ при $i \neq j$ положительны, то λ_0 является простым собственным значением матрицы монодромии; остальные собственные значения по модулю меньше λ_0.

В заключение рассмотрим случай системы (27.19) с постоянными коэффициентами, то есть системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = b_{11}x_1 + ... + b_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = b_{n1}x_1 + ... + b_{nn}x_n. \end{cases} \tag{27.25}$$

Матрицантом этой системы является матрица $e^{B(t-s)}$; матрица монодромии – это матрица $e^{B\omega}$. Собственные значения матрицы монодромии равны $e^{\lambda\omega}$, где λ – собственные значения матрицы B, то есть корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{27.26}$$

Из теоремы 2 вытекает (впрочем, это легко получить и непосредственно), что уравнение (27.26) имеет по крайней мере один вещественный корень, если неотрицательны все недиагональные элементы матрицы B.

27.5. Производная оператора A. Предположим, что функции $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ удовлетворяют условиям

$$f_i(t, 0, ..., 0) \equiv 0 \ \ (i = 1, ..., n). \qquad (27.27)$$

Будем считать, что существуют производные

$$b_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(t, 0, ..., 0) \equiv 0 \ \ (i, j = 1, ..., n)$$

и, более того, что имеют место представления

$$f_i(t, x_1, ..., x_n) = b_{i1}(t)x_1 + ...b_{in}(t)x_n + \varphi_i(t, x_1, ..., x_n), \qquad (27.28)$$

где функции $\varphi_i(t, x_1, ..., x_n)$ содержат малые высших порядков

$$|\varphi_i(t, x_1, ..., x_n)| \leq \alpha(\|x\|) \ \ (i = 1, ..., n) \qquad (27.29)$$

и неубывающая функция $\alpha(\rho)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha(\rho)}{\rho} = 0. \qquad (27.30)$$

Тогда система (27.1) может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x + \varphi(t, x), \qquad (27.31)$$

где

$$\|\varphi(t, x)\| \leq n\alpha(\|x\|). \qquad (27.32)$$

Покажем, что производная $A'(\theta)$ оператора (27.5) определяется равенством

$$A'(\theta)x_0 = Ux_0 = U(\omega, 0)x_0. \qquad (27.33)$$

Уравнение (27.31) равносильно интегральному уравнению

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + \int\limits_0^t U(t, \tau)\varphi(\tau, x(\tau))d\tau,$$

откуда вытекает оценка

$$\|x(t)\| \leq b_1\|x_0\| + b_1\omega \max_{0 \leq \tau \leq \omega} \|\varphi(\tau, x(\tau))\| \ \ (0 \leq t \leq \omega)$$

и в силу неравенства (27.32)

$$\max_{0\le t\le\omega}\|x(t)\| \le b_1\|x_0\| + b_1\omega n\alpha\left(\max_{0\le\tau\le\omega}\|x(\tau)\|\right). \tag{27.34}$$

Из (27.30) и из непрерывной зависимости решений от начальных данных вытекает существование такого δ_0, что при $\|x_0\| < \delta_0$ выполняется неравенство

$$\alpha\left(\max_{0\le\tau\le\omega}\|x(\tau)\|\right) \le \frac{1}{2b_1\omega n}\left(\max_{0\le\tau\le\omega}\|x(\tau)\|\right).$$

Значит, при $\|x_0\| < \delta_0$ из (27.34) вытекает следующая оценка:

$$\max_{0\le t\le\omega}\|x(t)\| \le 2b_1\|x_0\|. \tag{27.35}$$

Обозначим через $y(t)$ решение однородной системы $dy/dt = B(t)y$. Оценим разность $x(t)-y(t)$, где решение $x(t)$ удовлетворяет тому же начальному условию, которому удовлетворяет $y(t)$. Очевидно,

$$\frac{d(x(t)-y(t))}{dt} = B(t)(x(t)-y(t)) + \varphi(t, x(t)),$$

откуда

$$x(t)-y(t) = \int\limits_0^t U(t,\tau)\varphi(\tau, x(\tau))d\tau$$

и в силу (27.35) при $\|x_0\| < \delta_0$ выполняется неравенство

$$\|x(t)-y(t)\| \le b_1 n\alpha(2b_1\|x_0\|) \ \ (0\le t\le\omega).$$

Из (27.30) вытекает тогда, что

$$\lim_{\|x_0\|\to 0}\max_{0\le t\le\omega}\frac{\|x(t)-y(t)\|}{\|x_0\|} \le b_1\omega n\lim_{\|x_0\|\to 0}\frac{\alpha(2b_1\|x_0\|)}{\|x_0\|} = 0.$$

Формула (27.33) доказана.

27.6. Существование положительного периодического решения. В п. 27.3 было показано, что при некоторых условиях можно гарантировать существование положительного периодического решения, если оператор $A'(\theta)$ имеет в конусе единственный собственный вектор, которому соответствует собственное значение, большее чем 1.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 27.4. *Пусть удовлетворяющие условиях* (27.7) *и* (27.17) *функции* $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ *допускают представление* (27.28). *Пусть выполнено условие* (27.12). *Пусть, наконец, наибольшее вещественное собственное значение матрицы монодромии линеаризованной системы* $dy/dt = B(t)y$ *больше чем 1 и матрица монодромии в конусе неотрицательных векторов не имеет ненулевых неподвижных точек (не имеет положительных собственные векторов, которым отвечает собственное значение, равное 1).*

Тогда система (27.0) *имеет по крайней мере одно положительное периодическое решение* $x(t)$:

$$x_i(t) \geq 0, \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i(t) > 0, \ \ x_i(t+\omega) \equiv x_i(t).$$

Заметим, что из условий (27.7) и (27.17) вытекает неотрицательность функций $b_{ij}(t)$ при $i \neq j$. Поэтому матрица монодромии всегда имеет положительное вещественное собственное значение.

Если матрица $B(t)$ не зависит от t, то достаточное условие существования положительного периодического решения (при выполнении условий (27.07), (27.17) и (27.12)) формулируется особенно просто – достаточно, чтобы уравнение (27.26) имело положительный корень и не имело нулевого корня.

Допустим теперь, что при неотрицательных x_j и при достаточно больших суммах $x_1 + ... + x_n$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t, x_1, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x_1, ..., x_n) \geq 0 \qquad (27.36)$$

в определенном смысле противоположное неравенству (27.10).

Если выполнено условие (27.36), то решения системы (27.0) могут оказаться непродолжимыми на промежуток $[0, \omega]$. В этом случае наряду с системой (27.0) рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{g_i(t, x_1, ..., x_n)}{1 + \varphi(x_1, ..., x_n) \sum\limits_{i=1}^{n} |g_i(t, x_1, ..., x_n)|}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = \dfrac{g_i(t, x_1, ..., x_n)}{1 + \varphi(x_1, ..., x_n) \sum\limits_{i=1}^{n} |g_i(t, x_1, ..., x_n)|}, \end{cases} \tag{27.37}$$

где

$$g_i(t, x_1, ..., x_n) = \begin{cases} f_i(t, x_1, ..., x_n), & \text{если} \quad \Phi(x_1, ..., x_n) \leq \Phi_0, \\ f_i(t, x_1, ..., x_n) + \varphi(x_1, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x_1, ..., x_n), \\ 0, & \text{если} \quad \Phi(x_1, ..., x_n) \geq \Phi_0; \end{cases}$$

и

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \Phi(x_1, ..., x_n) \leq \Phi_0, \\ \Phi(x_1, ..., x_n) - \Phi_0, & \text{если} \quad \Phi(x_1, ..., x_n) \geq \Phi_0, \end{cases}$$

а Φ_0 – такое положительное число, что при

$$\Phi(x_1, ..., x_n) \geq \Phi_0 \tag{27.38}$$

выполнено неравенство (27.36).

Правые части системы (27.37) ограничены (в конусе неотрицательных векторов), поэтому её решения можно считать определенными при всех $t \geq 0$. Каждое неотрицательное периодическое решение

$$x^*(t) = \{x_1^*(t), ..., x_n^*(t)\}$$

системы (27.37) будет одновременно периодическим решением основной системы (27.0). Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что в силу (27.36) на каждом решении

$$x(t) = \{x_1(t), ..., x_n(t)\}$$

системы (27.37), лежащем в области (27.38), функция

$$u(t) = \Phi[x_1(t), ..., x_n(t)]$$

строго возрастает, так как её производная положительна.

Правые части системы (27.37) удовлетворяют условию (27.36). Таким образом, общность результата не уменьшится, если мы дополнительно к условию (27.36) предположим, что все решения системы (27.0) определены на промежутке $[0, \omega]$.

Из условия (27.36) легко вывести следствие, что оператор A, определенный равенством (27.5), либо удовлетворяет при больших значениях $B(x_1, ..., x_n)$ условию

$$Ax_0 \leqq x_0,$$

либо его можно переопределить таким образом, чтобы это условие выполнялось для переопределенного оператора. Из результатов гл. 4 книги М. А. Красносельского [22] вытекает тогда, что достаточным условием существования периодических решений у системы (27.0) является предположение о том, что спектр оператора $A'(\theta)$ лежит в круге, радиус которого меньше 1. Как нам уже известно, оператор $A'(\theta)$ есть оператор монодромии линеаризованной системы.

Выбирая в качестве $\Phi(x_1, ..., x_n)$ функцию (27.11), приходим к следующей теореме:

Теорема 27.5. *Пусть удовлетворяющие условиям* (27.7) *и* (27.17) *функции* $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ *допускают представление* (27.28). *Пусть выполнено условие*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(t, x_1, ..., x_n) \geq 0, \tag{27.39}$$

если сумма $x_1 + ... + x_n$ $(x_j \geq 0)$ *достаточно велика. Пусть, наконец, все собственные значения матрицы монодромии линеаризованной системы* $dy/dt = B(t)y$ *по модулю меньше* 1.

Тогда система (27.0) *имеет по крайней мере одно положительное периодическое решение* $x(t)$:

$$x_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(t) > 0, \quad x_i(t+\omega) \equiv x_i(t).$$

27.7. Линеаризация на бесконечности. Предположим, что функции $f_i(t, x_1, ..., x_n)$ асимптотически линейны по конусу K. Это значит, что существуют такие функции $c_{ij}(t)$, что при неотрицательных $x_1, ..., x_n$ справедливы представления

$$f_i(t, x_1, ..., x_n) = c_{i1}(t)x_1 + ... + c_{in}(t)x_n + \psi_i(t, x_1, ..., x_n), \qquad (27.40)$$

где

$$|\psi_i(t, x_1, ..., x_n)| < \gamma(\|x\|), \qquad (27.41)$$

причем неубывающая функция $\gamma(\rho)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{\gamma(\rho)}{\rho} = 0. \qquad (27.42)$$

Функции $c_{ij}(t)$ в дальнейшем предполагаются непрерывными.

Если выполнено условие (27.40), то систему (27.1) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + \psi(t, x), \qquad (27.43)$$

где

$$|\psi_i(t, x)| < n\gamma(\|x\|), \qquad (27.44)$$

Отметим, что все решения системы (27.43), лежащие в конусе, будут определены при всех значениях $t \geq 0$.

Матрицант линейной системы

$$\frac{dy}{dt} = C(t)y \qquad (27.45)$$

обозначим через $V(t, s)$. Тогда решения системы (27.43) будут удовлетворять интегральному уравнению

$$x(t) = V(t, 0)x_0 + \int_0^t V(t, \tau)\psi(\tau, x(\tau))d\tau. \qquad (27.46)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство асимптотической линейности по конусу оператора A, определенного равенством (27.5), и установление равенства

$$A'(\infty)x_0 = Vx_0 = V(\omega,0)x_0. \tag{27.47}$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Из (27.44) и (27.42) вытекает существование такого числа $M = M(\varepsilon)$, что

$$\|\psi(t,x)\| \le \varepsilon\|x\| + M(\varepsilon) \ \ (x \in K). \tag{27.48}$$

Тогда из (27.46) вытекает неравенство

$$\max_{0\le t\le\omega}\|x(t)\| \le b_2\|x_0\| + b_2\omega\left(\varepsilon\max_{0\le t\le\omega}\|x(t)\| + M(\varepsilon)\right),$$

откуда

$$\max_{0\le t\le\omega}\|x(t)\| \le \frac{b_2\|x_0\| + b_2\omega M(\varepsilon)}{1-b_2\omega\varepsilon}, \tag{27.49}$$

где

$$b_2 = \max_{0\le t,s\le\omega}\|V(t,s)\|.$$

Пусть $y(t)$ — решение системы (27.45), удовлетворяющее тому же начальному условию, которому удовлетворяет решение $x(t)$ системы (27.43). Очевидно,

$$\frac{d(x-y)}{dt} = C(t)(x-y) + \psi(t,x),$$

откуда

$$x(t) - y(t) = \int_0^t V(t,\tau)\psi(\tau,x(\tau))d\tau$$

и в силу (27.48) и (27.49)

$$\|x(t)-y(t)\| \le b_2\omega\varepsilon\frac{b_2\|x_0\| + b_2\omega M(\varepsilon)}{1-b_2\omega\varepsilon}.$$

Из полученного неравенства вытекает, что

$$\lim_{x_0 \in K,\, \|x_0\| \to \infty} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|x_0\|} \leq \frac{b_2^2 \omega \varepsilon}{1 - b_2 \omega \varepsilon},$$

и так как ε произвольно, то

$$\lim_{x_0 \in K,\, \|x_0\| \to \infty} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|x_0\|} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $t = \omega$, приходим к равенству (27.47).

27.8. Существование положительных периодических решений у линейных на бесконечности систем. Из результатов последнего пункта и из теоремы 4.7 вытекает, что система (27.0) имеет по крайней мере одно периодическое решение, если выполнено условие (27.7)

$$f_i(t, x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \geq 0 \ \ (x_j \geq 0 \text{ при } j \neq i)$$

и если все собственные значения матрицы монодромии системы (27.45) по модулю меньше 1. Здесь предполагается, что правые части системы допускают представление (27.40).

Теорема 27.6. *Пусть выполнены условия* (27.7) *и* (27.17).*Пусть правые части системы* (27.0) *допускают представления* (27.28) *и* (27.40), *причём каждая из матриц монодромии систем*

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y \ \ \textit{и} \ \ \frac{dy}{dt} = C(t)y$$

имеет единственный собственный вектор с неотрицательными компонентами, которым отвечают собственные значения λ_0 *и* λ_∞.

Тогда для существования положительного периодического решения достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

$$\lambda_0 < 1,\ \lambda_\infty > 1 \ \ \textit{или} \ \ \lambda_0 > 1,\ \lambda_\infty < 1.$$

27.9. Замечание о теоремах единственности. Теоремы единственности и теоремы о сходимости последовательных приближений применимы и к задаче о периодических решениях системы (27.0). Эти применения основаны на признаках вогнутости операторов точечных преобразований.

Отметим, что условия применимости метода последовательных приближений являются одновременно условиями асимптотической устойчивости соответствующего периодического решения.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Теоретические исследования логарифмической нормы распадаются на три рукава:

(1) матричный вариант;

(2) теория линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве;

(3) перенесение полученных в первых двух пунктах результатов на случай банаховой алгебры (коммутативные или нет).

При решении каких задач находит применение логарифмическая норма?

Локализация спектра матрицы

$$\alpha = \mathrm{spa}\, A \le ||A||_{\log} \equiv a. \tag{1}$$

Оценка (1) показывает в какой полуплоскости лежит спектр матрицы.

Теория устойчивости. Матрица A гурвицева, если выполнено условие

$$||A||_{\log} \equiv a < 0. \tag{2}$$

Оценка (2) говорит не только о том, что матрица A гурвицева (утверждение качественного характера), но и оценить меру гурвицевости матрицы

$$\delta \equiv |||A||_{\log}| > 0 \tag{3}$$

это утверждение количественного характера. Сюда же можно отнести и формулу (4)

$$||A||_{\log} \le 0. \tag{4}$$

Оценка (матричной, операторной) экспоненты

$$||e^{tA}|| \le e^{ta}, \;\; 0 \le t < +\infty. \tag{5}$$

Эта оценка используется при оценке решений дифференциальных уравнений, а также при оценке погрешности численного интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Всё сказанное в той или иной степени может быть использовано и при изучении линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Обзор наиболее важных публикаций

С. М. Лозинский «Заметки о статье В. С. Годлевского» (1972) [27].

Для случая отрицательной логарифмической нормы матрицы A дана оценка нормы A^{-1} через логарифмическую норму матрицы A. даны приложения к оценке погрешности системы линейных алгебраических уравнений.

В. Р. Носов «Об устойчивости некоторых нестационарных уравнений» (1997) [31].

С использованием логарифмической нормы С. М. Лозинского сформулированы различные достаточные условия устойчивости линейных нестационарных уравнений. Конструктивно доказаны новые достаточные признаки устойчивости по первому нестационарному приближению.

С. В. Фролова «Исследование сходимости схем повышенного порядка аппроксимации для уравнений параболического типа» (2007) [46].

Построение схем повышенного порядка аппроксимации с использованием метода моментов и специального интерполирования в приграничных узлах проведено ранних в работах. Здесь на примере нелинейных схем доказана сходимость и приведена оценка погрешности этого метода для случая параболического уравнения. Исследование сходимости проводится с помощью логарифмической нормы, впервые представленной С. М. Лозинским [26] и Г. Далквистом.

А. А. Боголюбов, Ю. А. Ильин «Существование расстояния в окрестности инвариантного тора одной существенно нелинейной системы» (2008) [8].

А. В. Чегодаев «Математические модели и методы оценки характеристик стохастических систем, близких к поглощаемым» (2009) [49].

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплекс программ. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук.

...При этом основные проблемы возникают при получении явных оценок оператора Коши. Для получения этих оценок используется логарифмическая норма, понятие которой введено у С. М. Лозинского, а для операторов в банаховом пространстве изучено Ю. Л. Далецким и М. Г. Крейном.

А. И. Перов «Об одном критерии устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами» (2013) [38].

В статье признаки устойчивости выводятся с помощью логарифмической нормы С. М. Лозинского.

А. В. Коротышева «Оценки устойчивости для нестационарных марковских моделей в системах массового обслуживания» (2014) [21].

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплекс программ. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук.

...Результаты диссертации могут быть использованы при построении и исследовании стохастических моделей конкретных задач в телекоммуникационных системах, системах страхования, статистической физике, химической кинетики, популяционной биологии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Авдеева О. И.* Об одном свойстве усреднённых систем / О. И. Авдеева // Вестник Тамбовского Университета. Сер.: Естественные и технические науки. – 2013. – Т. 18, вып. 5. – С. 2430–2431.

2. *Антоневич А. Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : Университетское, 1984. – 352 с.

3. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1984. – 272 с.

4. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ / Ю. И. Балакришнан. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

5. *Баскаков А. Г.* Лекции по алгебре : учебное пособие / А. Г. Баскаков. – Воронеж. : ИПЦ ВГУ, 2013. – 155 с.

6. *Беккенбах Э.* Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. – М. : Мир, 1965. – 276 с.

7. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1969. – 368 с.

8. *Боголюбов А. А.* Существование решения в окрестности инвариантного тора одной существенно нелинейной системы / А. А. Боголюбов, Ю. А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2008. – № 2. – С. 19–38.

9. *Боровских А. В.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. В. Боровских, А. И. Перов. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2013. – 550 с.

10. *Былов Б. Ф.* Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов [и др.]. – М. : Наука, 1966. – 576 с.

11. *Важевский Т. (Wazewski T.)* Sui limitation des integrales des systems d'equation differentilles liners ordinates / T. Wazewski // Studia Math. – 1948. – № 10. – P. 48–59.

12. *Винтнер А. (Winter A.)* Asymptotic integration constant / A. Winter // Amer. J. Math. – 1946. – № 68. – P. 125–132.

13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.

14. *Глазман И. М.* Конечномерный линейный анализ / И. М. Глазман, Ю. И. Любич. – М. : Наука, 1969. – 476 с.

15. *Далецкий Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.

16. *Далквист Г. (Dahlqust G.)* Stability and bounds in the numerical integration of ordinary differential equations / C. Dahlqust // 85 S. Stockholm. – 1959. – K. Tekniska Högskolans Handlingar.

17. *Д'Анджело Г.* Линейные системы с переменными коэффициентами (анализ и синтез) / Г. Д'Анджело. – М. : Машиностроение, 1974. – 288 с.

18. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

19. *Ильин Ю. А.* О применении логарифмической нормы к нелинейным системам дифференциальных уравнений / Ю. А. Ильин // Нелинейные динамические системы. – Ленинград. – 1999. – № 2. – С. 19–38.

20. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 448 с.

21. *Коротышева А. В.* Оценки устойчивости для нестационарных марковских моделей в системах массового обслуживания : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. В. Коротышева. – Вологда, 2014. – 17 с.

22. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Физматгиз, 1962. – 396 с.

23. *Красносельский М. А.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1966. – 500 с.

24. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений / С. Лефшец. – М. : ИЛ, 1961. – 338 с.

25. *Литтвульд Дж.* Математическая смесь / Дж. Литтвульд. – М. : Наука, 1974. – 144 с.

26. *Лозинский С. М.* Оценка погрешности численного интегрирования / С. М. Лозинский // Изв. вузов. – 1958. – № 5. – С. 52–90.

27. *Лозинский С. М.* Замечания о статье В. С. Годлевского / С. М. Лозинский // ЖВМиМФ. – 1973. – Т. 13, № 2. – С. 457–459.

28. *Любич Ю. И.* Нормы матриц и их приложения / Ю. И. Любич, Г. Р. Белицкий. – Киев : Наукова Думка, 1984. – 160 с.

29. *Маркус М.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. – М. : Наука, 1972. – 232 с.

30. *Массера Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х. Массера, Х. Шеффер. – М. : Наука, 1970. – 456 с.

31. *Носов В. Р.* Об устойчивости некоторых нестационарных уравнений / В. Р. Носов // АиТ. – 1997. – № 9. – С. 31–41.

32. *Пароди М.* Локализация характеристических чисел матриц и её приложения / М. Пароди. – М. : ИЛ, 1960. – 172 с.

33. *Перов А. И.* Достаточные условия устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами в критических случаях / А. И. Перов // АиТ. – 1997. – № 12. – С. 80–89.

34. *Перов А. И.* Оценки элементов обратных матриц в условиях критериев регулярности / А. И. Перов // ЖВМиМФ. – 1999. – Т. 39, № 6. – С. 867–875.

35. *Перов А. И.* Новые признаки устойчивости систем с постоянными коэффициентами / А. И. Перов // АиТ. – 2002. – № 4. – С. 22–33.

36. *Перов А. И.* Обобщённый принцип сжимающих отображений / А. И. Перов. // Вестник ВГУ. Сер.: Физика и математика. – 2005. – № 1. – С. 190–201.

37. *Перов А. И.* Детерминантный признак сжатия / А. И. Перов, Т. С. Грязнова // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж, 2013. – С. 183–184 .

38. *Перов А. И.* Об одном критерии устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / А. И. Перов // АиТ. – 2013. – № 2. – С. 22–37.

39. *Перов А. И.* Признаки устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / А. И. Перов, И. Д. Коструб, О. И. Авдеева // Материалы II Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы и тенденции в современной науке» (14 апреля 2015 г.). – Махачкала : Махачкалинский инновационный университет. – 2015. – С. 64–83.

40. *Перов А. И.* Логарифмическая норма для линейных неограниченных операторов / А. И. Перов, И. Д. Коструб // Материалы международной научно-практической конференции «Международный форум: технические и математические науки» (9 – 12 ноября 2015 г.). – Воронеж : Лесотехнический университет. – 2015. – С. 219–223.

41. *Перов А. И.* Признаки устойчивости периодических решений систем дифференциальных уравнений, основанные на тео-

рии внедиагонально неотрицательных матриц / А. И. Перов, И. Д. Коструб. – Воронеж : Научная книга : 2015. – 123 с.

42. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М. : Наука, 1944. – 267 с.

43. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1965. – 332 с.

44. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – М. : ИЛ, 1954. – Т. 2. – 416 с.

45. *Фаддеев Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – М.-Л. : Физматгиз, 1963. – 736 с.

46. *Фролова С. В.* Исследование сходимости схем повышенного порядка аппроксимации для уравнений параболического типа / С. В. Фролова // Вестник БГУ. Сер. 1: Математика и информатика. – 2007. – № 2. – С. 107–110.

47. *Халанай А.* Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М. : Мир, 1971. – 312 с.

48. *Харди Г. Г.* Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтвульд, Г. Полиа. – М. : ИЛ, 1948. – 456 с.

49. *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс – М. : ИЛ, 1962. – 830 с.

49. *Чегодаев А. В.* Математические модели и методы оценки характеристик стохастических систем, близких к поглощающим : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. В. Чегодаев. – Тверь, 2009. – 17 с.

50. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. – М. : Мир, 1964. – 480 с.

51. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1972. – 720 с.

Учебное издание

Перов Анатолий Иванович
Коструб Ирина Дмитриевна

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ НОРМА ЛОЗИНСКОГО И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Подписано в печать 05.04.16. Формат 60×84/16.
Уч.-изд. л. 4.5. Усл. печ. л. 6,7.
Тираж 50 экз. Заказ 220.

Издательский дом ВГУ.
394000, г. Воронеж, пл. Ленина, 10.

Отпечатано с готового оригинал-макета.
в типографии Издательского дома ВГУ.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3.