АСТРАХАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОММУНИКАЦИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ

Методическое пособие

Лабораторный практикум

По курсу «**Теория информации»**

Для студентов направления
10.03.01 «Безопасность компьютерных систем»

Астрахань 2017

Составитель: Сибикина И. В. к.т.н. доцент кафедры информационная безопасность.

Сборник представляет собой методические указания к выполнению практических работ, содержит необходимый теоретический материал, примеры, задания. Может быть использован для проведения практических работ, а также для самостоятельной работы студентов.

Рецензент: зав. каф. ПМК проф. Попов Г.А.
Методические указания утверждены на заседании каф. ИБ

Содержание.

Общие требования к выполнению практических работ

Практические работы выполняются на персональной ЭВМ с использованием языка программирования высокого уровня и заключаются в составлении программ, решающих определённый класс задач. Каждая программа должна обладать достаточным интерфейсом для удобства работы пользователя. В частности, это означает, что после запуска программы на каждом шаге работы пользователю должны быть даны чёткие указания или рекомендации по возможным вариантам его действий, а также необходимые комментарии промежуточных и окончательных результатов. При этом должна быть предусмотрена защита от неверного ввода с указанием на допущенную ошибку и приглашением повторить действие.

При отчёте о выполнении практической работы студент должен:

показать в действии отлаженную программу, удовлетворяющую описанным выше требованиям; уверенно ориентироваться в алгоритме и самом тексте программы на языке высокого уровня; знать необходимый теоретический материал.

При выполнении конкретных практических работ преподаватель может уточнить или дополнить требования, приведённые выше, также систему оценивания и поощрений.

Практическая работа №1. «Энтропия. Свойства энтропии».

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 1.1. Вероятностной схемой X называется

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

где $x_1, x_2, ..., x_n$- полная группа попарно несовместных событий, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – соответствующие вероятности.

Определение 1.2. Количеством информации, содержащимся в сообщении x, называется $h(x) = -\log p(x)$. (Основание логарифма, если не оговорено противное, принимается равным 2.)

Определение 1.3. Энтропией вероятностной схемы X, называется $H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log p_i$.

Значение функции f(t) = t·log t при t = 0 считаем равным нулю, доопределяя её в этой точке по непрерывности. Таким образом, эта функция определена, по крайней мере, на отрезке [0;1].

Пусть имеются две схемы X и У

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

У	y_1	y_2	...	y_m
P	q_1	q_2	...	q_m

Определение 1.4. Энтропией произведения вероятностных схем X и У, называется

$$H(XY) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i y_j) \cdot \log p(x_i y_j)$$

Если схемы X и У независимы, то энтропия произведения вероятностных схем равна сумме энтропий каждой схемы: $H(XY) = H(X) + H(Y)$.

Определение 1.5. Условной энтропией вероятностной схемы У относительно схемы X называется:

$$H(Y \mid X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)\,p(y_j \mid x_i)\log p(y_j \mid x_i),$$

где $p(y_j \mid x_i)$ – условная вероятность события y_j при условии, что получено сообщение x_i.

Энтропия произведения и условная энтропия связаны между собой соотношениями:

$$H(XY) = H(X) + H(Y \mid X) = H(Y) + H(X \mid Y).$$

ПРИМЕР

Задание. Событие *A* в каждом из *n* повторных независимых испытаний происходит с вероятностью *p*. Найти энтропию числа появлений события *A*. Составить соответствующую вероятностную схему. Выяснить характер изменения энтропии в зависимости от изменения *p* на промежутке [0;1] при значении *n* = 1, построив график соответствующей функции H(*p*). Определить её наименьшее и наибольшее значение.

Рассмотрим энтропию числа появлений события A в серии из n испытаний.

Если n=1 и X- число появлений события A в серии из n испытаний, то

X	0	1
P	q	p

где q=1-p.

По определению 1.3, функция $H(p) = -p \cdot \log p - (1-p)\log(1-p)$. Построим график H(p) (рис.1):

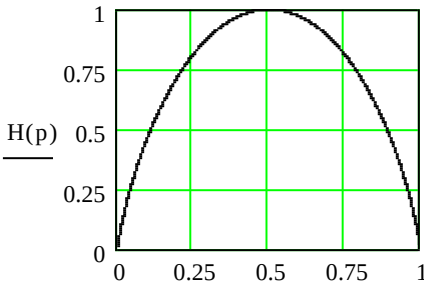


Рис.1 График функции H(p)

При p=0,5 функция H(p) достигает максимума H(0,5)=1, при p=0 или p=1 функция H(p) достигает минимума H(0)=H(1)=0. Функция возрастает на промежутке [0;0,5] и убывает на отрезке [0,5;1].

Таким образом, наименьшее значение, равное нулю, энтропия рассматриваемой вероятностной схемы принимает при p=0 и при p=1, то есть в тех случаях, когда исход опыта с вероятностной схемой X однозначно определён до его проведения. Наибольшее же значение, равное одному биту, энтропия данной схемы принимает только при p=0,5 , то есть в том случае, когда с равными вероятностями можно предполагать, что в результате испытания произойдёт или не произойдёт событие A, что соответствует наибольшей неопределённости исхода опыта с вероятностной схемой X до его проведения. При приближении p к 0,5 , то есть с увеличением неопределённости, энтропия возрастает, а при приближении p к концам отрезка [0;1], то есть с уменьшением неопределённости, энтропия убывает. Следовательно, приведённые выше рассуждения подтверждают тезис о том, что энтропия является мерой неопределённости вероятностной схемы до проведения испытаний с ней.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Событие A в каждом из n повторных независимых испытаний происходит с вероятностью p. Найти энтропию числа появлений события A. Составить соответствующую вероятностную схему. Выяснить характер изменения энтропии в зависимости от изменения p на промежутке [0;1] при фиксированном значении n, построив график соответствующей функции $H(p)$. Определить её наименьшее и наибольшее значение.(Значения параметра n задаются преподавателем.)

2. Событие A в каждом из независимых испытаний происходит с вероятностью p. Найти энтропию числа испытаний до первого появления события A. Составить соответствующую вероятностную схему. Выяснить характер изменения энтропии в зависимости от изменения p на промежутке (0;1], построив график соответствующей функции $H(p)$. Определить её наименьшее и наибольшее значение.

3. В партии из n изделий имеется k ($k \leq n$) стандартных. Наудачу отобраны m изделий ($m \leq n$). Найти энтропию числа стандартных изделий среди отобранных. Выяснить характер изменения энтропии в зависимости от изменения k на промежутке [0; n] при фиксированных значениях n и m, построив график соответствующей функции $H(k)$. Для этого при каждом значении k составить необходимую вероятностную схему. Определить наименьшее и наибольшее значение $H(k)$. (Значения параметров n и m задаются преподавателем.)

4. Интенсивность простейшего потока событий равна λ. Найти энтропию числа событий из этого потока, появившихся за промежуток времени длительности t. Составить соответствующую вероятностную схему. Выяснить характер изменения энтропии в зависимости от изменения t на промежутке [0;5λ] при фиксированном значении λ, построив график соответствующей функции $H(t)$. Определить её наименьшее и наибольшее значение.(Значения параметра λ задаются преподавателем.)

5. Интенсивность простейшего потока событий равна λ. Найти энтропию числа событий из этого потока, появившихся за промежуток времени длительности *t*. Составить соответствующую вероятностную схему. Выяснить характер изменения энтропии в зависимости от изменения λ на промежутке [0;3*t*] при фиксированном значении *t*, построив график соответствующей функции H(λ). Определить её наименьшее и наибольшее значение.(Значения параметра *t* задаются преподавателем.)

При выводе графика на экран должна быть тщательно прорисована система координат с обозначением и разметкой осей; показаны координаты экстремальных точек. Также аккуратно должны быть оформлены таблицы с вероятностными схемами.

ВОПРОСЫ

1. Количество информации в сообщении; основные свойства.
2. Количество информации в сообщении относительно другого сообщения; основные свойства.
3. Энтропия, условная энтропия; основные свойства.
4. Взаимная информация вероятностных схем; основные свойства.

Практическая работа №2. «Обработка алфавита введенного сообщения»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Так как информацию можно рассматривать как неопределённость, снимаемую при получении сообщения, то можно дать следующее определение.

Определение 2.1. Пусть проводится *k* независимых испытаний с вероятностной схемой *X*. Тогда количеством информации, которое несёт в себе сообщение о результатах этой серии опытов, называется $I = k \cdot H(X)$.

В частном, но с практической точки зрения очень важном, случае, когда вероятностная схема *X* указывает вероятности появления символов алфавита от некоторого стохастического источника сообщений, причём буквы появляются независимо друг от друга, *k* интерпретируется как длина сообщения, полученного от данного источника, *H*(*X*) – среднее количество информации, которое несёт в себе одна буква достаточно длинного сообщения, *I* - количество информации, которое несёт в себе сообщение из *k* символов.

Для случая равновероятных и взаимно независимых m символов $I = k \cdot \log m$.

Если схемы X и У статистически зависимы, то возможно измерение количества информации о системе X, которое дает наблюдение за системой У.

Определение 2.2. Количеством информации, которое несет схема У относительно схемы X называется:

$$I(Y, X) = H(Y) - H(Y \mid X)$$

Определение 2.3. Информационной избыточностью называется величина

$$D = 1 - \frac{H}{H_{\max}}$$

Частные виды избыточности.

1. Избыточность, обусловленная неравномерным распределением символов сообщения: $D_p = 1 - \dfrac{-\sum_i p_i \cdot \log p_i}{\log m}$

2. Избыточность, обусловленная статистической связью между символами сообщения:

$$D_s = 1 - \frac{-\sum_i \sum_j p(x_i) \cdot p(y_j \mid x_i) \cdot \log(y_j \mid x_i)}{\sum_i p_i \cdot \log p_i}$$

3. Полная информационная избыточность: $D=D_p+D_s- D_pD_s$.

ПРИМЕР

Задание. Произвести статистическую обработку данного сообщения, считая, что источник сообщений периодически, достаточно долго выдаёт следующую последовательность символов 12342334551233. Определить энтропию, приходящуюся в среднем на одну букву и на одно двухбуквенное сочетание, количество информации, которое несёт в себе сообщение о получении первой буквы относительно второй. Найти длину кода при равномерном кодировании и избыточность.

Пусть имеется сообщение:
1234233455123312342334551233123423345512 33... .

Составим схему появления однобуквенных сочетаний:

X	1	2	3	4	5	∑
n	2	3	5	2	2	14
w	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{14}$	1

Энтропия схемы X равна

$$H(X) = -\left[3 \cdot \frac{2}{14} \cdot \log \frac{2}{14} + \frac{5}{14} \cdot \log \frac{5}{14} + \frac{3}{14} \cdot \log \frac{3}{14}\right] = 2{,}21$$

Составим схему $\overline{XY}$ появления двухбуквенных сочетаний

ХУ	12	23	31	34	33	42	45	51	55	$\sum$
n	2	3	1	2	2	1	1	1	1	14
w	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	1

Энтропия, приходящаяся на одно двухбуквенное сочетание, составляет

$$H(\overline{XY}) = -\left[3 \cdot \frac{2}{14} \cdot \log \frac{2}{14} + 5 \cdot \frac{1}{14} \cdot \log \frac{1}{14} + \frac{3}{14} \cdot \log \frac{3}{14}\right] = 3{,}039$$

Количество информации, которое несет появление первой буквы о второй, найдем по определению 2.3:

$$H(Y \mid X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i)\, p(y_j \mid x_i) \log p(y_j \mid x_i) =$$

$$= -\left[\frac{2}{14} \cdot \frac{2}{14} \cdot \log \frac{2}{14} + \frac{3}{14} \cdot \frac{3}{14} \cdot \log \frac{3}{14} + \frac{5}{14} \cdot 2 \cdot \frac{2}{14} \cdot \log \frac{2}{14} + \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{14} \cdot \log \frac{1}{14} + \frac{2}{14} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{14} \cdot \log \frac{1}{14}\right] = 0{,}698$$

$$I(Y, X) = 2{,}21 - 0{,}698 = 1{,}512$$

Найдем длину кода при равномерном кодировании однобуквенных сочетаний[1]:

m=5, $l = \lceil \log 5 \rceil = 3$

При этом возникает избыточность округления

$$\mathrm{D}_0 = 1 - \frac{\log 5}{3} = 0{,}226$$

Подсчитаем информационную избыточность:

$$\mathrm{D}_\mathrm{p} = 1 - \frac{2{,}21}{\log 5} = 0{,}048\,,\ D_s = 1 - \frac{0{,}698}{2{,}21} = 0{,}684\,,$$

$$D = 0{,}048 + 0{,}684 - 0{,}048 \cdot 0{,}684 = 0{,}699$$

[1] $\lceil x \rceil$ – округление в большую сторону.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Составить программу, позволяющую вводить сообщение произвольной длины из файла и с клавиатуры с последующей статистической обработкой введённого текста. Статистическая обработка текста включает в себя: выделение букв(включая пробелы и знаки препинания) алфавита данного сообщения; подсчёт и выведение на экран частоты и относительной частоты появления этих букв и указанных их сочетаний в порядке убывания вероятности. Определить энтропию, приходящуюся в среднем на одну букву и на одно двухбуквенное сочетание, количество информации, которое несёт в себе сообщение о получении первой буквы относительно второй. Найти длину кода при равномерном кодировании и избыточность.

При выводе на экран в соответствующих таблицах должны присутствовать столбцы: номер по порядку; символ; частота; относительная частота.

ВОПРОСЫ

5. Вероятностная схема; произведение вероятностных схем.
6. Количество информации в сообщении; основные свойства.
7. Количество информации в сообщении относительно другого сообщения; основные свойства.
8. Энтропия, условная энтропия; основные свойства.
9. Взаимная информация вероятностных схем; основные свойства.

Практическая работа №3. «Оптимальное кодирование».

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Определение 3.1. m-значным кодированием сообщений α алфавита A, в кодовом алфавите B, называется отображение $F : S \to B^*$, где S – множество сообщений, B^* - множество всех слов в алфавите B, содержащем m символов. F (α) называется кодом сообщения α .

Определение 3.2. Кодирование называется алфавитным, если оно сохраняет произведения слов. Для алфавитного кодирования коды однобуквенных сообщений называются элементарными.

Определение 3.3. Соответствие между буквами алфавита A и их элементарными кодами при алфавитном кодировании называется схемой кодирования.

Определение 3.4. Схема кодирования называется префиксной, если никакой элементарный код не является началом другого элементарного кода.

Определение 3.5. Средней длиной элементарного кода называется $\bar{l} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot l_i$, где $l_i = l(\beta_i)$ - длина элементарного кода β_i.

Определение 3.6. Коэффициентом относительной эффективности кодирования называется величина

$$\eta = \frac{H(X)}{\bar{l}}$$

Определение 3.7. Оптимальным для данного стохастического источника сообщений называется такое алфавитное кодирование, для которого достигается минимальная средняя длина элементарного кода.

Теорема 3.1. Для любого дискретного источника, характеризующегося вероятностной схемой X с конечным алфавитом и энтропией H(X), существует m-ичный префиксный код, в котором средняя длина кодового слова удовлетворяет неравенству

$$\frac{H(X)}{\log m} \le \bar{l} < \frac{H(X)}{\log m} + 1.$$

При построении оптимальных кодов можно использовать алгоритмы Шеннона-Фано или Хаффмана.

Алгоритм Шеннона-Фано.

1. Множество сообщений данной вероятностной схемы располагается в порядке убывания вероятностей.
2. Множество сообщений разбивается на части, приблизительно равные по суммарной вероятности. Первой части присваивается ноль, второй единица.
3. К каждой из частей применяются действия пункта 2.

Условием окончания работы алгоритма является наличие одного символа в каждой из подгрупп.

Алгоритм Хаффмана.

1. Последовательность сообщений данной вероятностной схемы располагается в порядке убывания вероятностей.
2. Последние два символа объединяются в один с вероятностью, равной сумме вероятностей объединенных символов.
3. С полученной последовательностью произвести действия пунктов 1 и 2, до образования последовательности из одного символа с суммарной вероятностью равной 1.
4. Строится кодовое дерево, в корне которого стоит символ с вероятностью 1.

ПРИМЕР

Задание. Произвести статистическую обработку данного сообщения, считая, что источник сообщений периодически, достаточно долго выдаёт следующую последовательность символов 12342334551233. Определить энтропию, приходящуюся в среднем на

одну букву, длину кода при равномерном кодировании и избыточность. Построить схемы алфавитного кодирования методами Фано и Хаффмана. Найти среднюю длину элементарного кода, эффективность сжатия. Предусмотреть возможность кодирования короткого сообщения в данном алфавите, введённого с клавиатуры, по каждой из схем.

Статистическая обработка приведённого сообщения, была выполнена в предыдущем примере, где и была получена вероятностная схема

X	1	2	3	4	5	∑
n	2	3	5	2	2	14
w	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{2}{14}$	1

Построим схему кодирования по алгоритму Шеннона-Фано.

символ	P				код
3	$\frac{5}{14}$	0	0		00
2	$\frac{3}{14}$		1		01
1	$\frac{2}{14}$	1	0		10
4	$\frac{2}{14}$		1	0	110
5	$\frac{2}{14}$			1	111

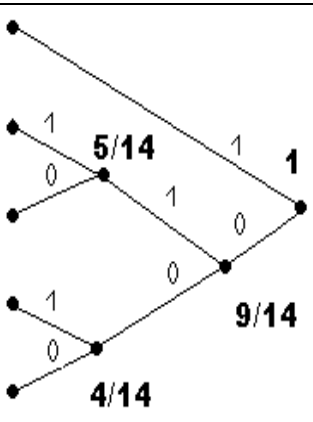
Средняя длина кодового слова равна

$$\bar{l} = \frac{5}{14} \cdot 2 + \frac{3}{14} \cdot 2 + \frac{2}{14} \cdot 3 \cdot 2 = 2.29$$

Коэффициент эффективности равен

$$\eta = \frac{2.21}{2.29} = 0.97$$

Построим схему кодирования по алгоритму Хаффмена.

символ	P		код
3	$\frac{5}{14}$		1
2	$\frac{3}{14}$		011
1	$\frac{2}{14}$		010
4	$\frac{2}{14}$		001
5	$\frac{2}{14}$		000

Средняя длина кодового слова равна

$$\bar{l} = \frac{5}{14} + \frac{3}{14} \cdot 3 + \frac{2}{14} \cdot 3 \cdot 3 = 2.29$$

Коэффициент эффективности равен

$$\eta = \frac{2.21}{2.29} = 0.97$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Составить программу, позволяющую вводить сообщение произвольной длины из файла и с клавиатуры с последующей статистической обработкой введённого текста. Определить энтропию, приходящуюся в среднем на одну букву, длину кода при равномерном кодировании и избыточность. Построить схемы алфавитного кодирования методами Фано и Хаффмана. Найти среднюю длину элементарного кода, эффективность сжатия. Предусмотреть возможность кодирования короткого сообщения в данном алфавите, введённого с клавиатуры, по каждой из схем.

При выводе на экран в соответствующих таблицах должны присутствовать столбцы: номер по порядку; символ; относительная частота; элементарный код.

ВОПРОСЫ

10. Кодирование. Алфавитное кодирование. Основные понятия.
11. Префиксные схемы алфавитного кодирования.
12. Неравенство Крафта-Макмиллана.
13. Стохастические источники сообщений. Основные понятия. Теоремы Шеннона.
14. Экономное кодирование. Определение, основные свойства.
15. Методы кодирования Фано и Хаффмана.

Практическая работа №4. «Код Хемминга».

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Определение 4.1. Минимальное количество символов, в которых все кодовые комбинации отличаются друг от друга, называется кодовым расстоянием.

Для исправления одной ошибки кодовое расстояние должно быть не менее 3 ($d_0 = 2s + 1 \geq 3$).

Для того чтобы в принятом сообщении можно было исправлять ошибки, кодовая комбинация должна обладать некоторой избыточностью, которая достигается за счет добавления контрольных разрядов. Число корректирующих разрядов должно удовлетворять следующим условиям.

Пусть r– число корректирующих символов, k– количество информационных разрядов, n– длина кода, тогда

$\log(n+1) + 1 > r \geq \log(n+1)$.

Код Хемминга является типичным примером систематического кода и может строиться на основе производящей матрицы. Порождающая матрица имеет k строк и n столбцов.

Порождающая матрица G может быть представлена двумя матрицами, единичной и добавочной. При выборе добавочной матрицы учитывают, что вес (весом двоичного вектора называется величина расстояния Хемминга от него до нулевого вектора) каждой строки не должен быть менее $d_0 - 1$.

Кодирование реализуется при помощи умножения информационной комбинации α на порождающую матрицу

$\beta = \alpha \cdot G$

Проверочная матрица H при двоичном кодировании представляет собой транспонированную добавочную матрицу, дополненную единичной. Проверочная матрица имеет r строк и n столбцов. Причем столбцы представляют собой значения синдрома для разряда, соответствующего номеру этого столбца.

Для определения синдрома необходимо умножить кодовую комбинацию на транспонированную проверочную матрицу

$$S = \overline{\beta} \cdot H^T$$

ПРИМЕР

Задание. Методом Хемминга закодировать комбинацию α=1101, построив порождающую проверочную матрицы. Внести ошибку в один из разрядов кодового вектора; найти синдром; найти и исправить ошибку.

Нетрудно видеть, что число информационных разрядов k=4, определим r, n.

Для расчета r можем использовать эмпирическую формулу $r = \lceil \log((k+1) + \lceil \log(k+1) \rceil) \rceil$. Получим r=3, n=7.

Имеем (7,4)– кодирование. Порождающая матрица G имеет размерность 4×7, а проверочная – 3×7.

Построим проверочную матрицу H, так чтобы ее столбцы были различны и не содержали нулевую комбинацию:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; d_0 \geq 3$$

Строим порождающую матрицу G:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Кодовая комбинация β имеет вид $\beta = \alpha G$=1101010,

Внесем ошибку в третий разряд $\overline{\beta}$ =1111010, вычислим синдром $S = \overline{\beta} \cdot H^T$ =101, что соответствует ошибке в третьем разряде. Исправленная кодовая комбинация $\beta_{исп}$ =1101010.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Методом Хемминга закодировать указанные информационные комбинации, построив порождающую проверочную матрицы. Внести ошибку в один из разрядов кодового вектора; найти синдром; найти и исправить ошибку.

Вариант	Информационные комбинации		
1	01111	101	10000001
2	111	1111000	11110
3	0011	10110	0000100
4	1111	0000110	10101
5	010111	11100011	001
6	011100	1010	1010101010
7	1110	010	010001000
8	1001	110	111001010
9	011	111111110	0100011
10	001	10001010	1111
11	111100001	1010	101
12	11000000	111	00001
13	110	001001	11110111
14	10011	011	011111111
15	001001001	11111	100

ВОПРОСЫ

1. Линейное кодирование. Основные понятия.
2. Порождающая и проверочная матрицы; синдром.
3. Помехоустойчивое кодирование. Основные понятия. Расстояние Хемминга; кодовое расстояние.
4. Метод кодирования Хемминга.

Практическая работа №5. «Циклические коды».

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Определение 5.1. Блочное (n, k)-кодирование называется циклическим, если при любой циклической перестановке символов кодовой комбинации получается также кодовая комбинация.

Теорема 5.1. Блочное (n, k)-кодирование является циклическим тогда и только тогда, когда оно порождено многочленом степени $r = n - k$, являющимся делителем двучлена $x^n + 1$.

Определение 5.2. Частное от деления двучлена $x^n + 1$ на порождающий многочлен называется проверочным многочленом.

Таким образом, для того, чтобы задать циклическое кодирование необходимо и достаточно определить соответствующий порождающий многочлен. Неприводимые делители двучленов $x^n + 1$ табулированы (см., например, таблицу 1), а прочие многочлены, порождающие циклические коды могут быть представлены как наименьшие общие кратные неприводимых.

Теорема 5.2. Для того, чтобы циклическое кодирование позволяло исправлять не менее одной ошибки необходимо и достаточно, чтобы остатки от деления одночленов x^i ($i = 0, 1, \ldots, n - 1$) на соответствующий порождающий многочлен были различны.

Построение и декодирование циклических кодов, исправляющих одиночную ошибку, осуществляется следующим образом.

1) Производится расчет количества контрольных символов. Если задано число информационных разрядов, то можем воспользоваться эмпирической формулой $r = \lceil \log((k+1) + \lceil \log(k+1) \rceil) \rceil$

2) Выбор образующего многочлена производится по таблице неприводимых многочленов (Таблица 1).Образующий многочлен следует выбирать как можно более коротким, но

степень его должна быть не менее числа контрольных разрядов, а число ненулевых членов– не меньше кодового расстояния.

3) Производится умножение многочлена, соответствующей информационной комбинации на одночлен той же степени, что и образующий многочлен.

4) Значения корректирующих разрядов находятся в результате деления многочлена, полученного в пункте 3) на образующий многочлен. Остаток от деления складывается по модулю 2 с многочленом, полученным в пункте 3).

Обнаружение и исправление ошибки также производится с помощью остатка от деления полученной комбинации на образующий многочлен.

Если принятая комбинация делится на образующий многочлен без остатка, то принят правильный код.

Если остаток не равен нулю, то в коде присутствует ошибка. Для исправления ошибки необходимо выполнить ряд действий.

1) Подсчитать вес (весом двоичного вектора называется величина расстояния Хемминга от него до нулевого вектора) остатка. Если он не больше корректирующей способности кода, то принятую комбинацию складывают с по модулю 2 с полученным остатком. Результат дает исправленную комбинацию.

2) Если вес остатка больше корректирующей способности кода, то необходимо циклически сдвинуть кодовую комбинацию на один разряд влево и результат поделить на образующий многочлен. Если вес остатка не больше корректирующей способности кода, то делимое складывают с остатком, а затем производят циклический сдвиг вправо на один разряд. Полученная комбинация является исправленной.

3) Если вес остатка больше корректирующей способности кода, то необходимо циклически сдвигать кодовую комбинацию влево, пока остаток не станет меньше корректирующей способности кода. В этом случае, для восстановления исправленной комбинации, результат сложения последнего делимого с его остатком сдвигают на такое количество разрядов вправо, сколько было совершено сдвигов влево.

ПРИМЕР

Задание. Закодировать комбинацию α=1101, построив порождающий и проверочный многочлен. Внести ошибку в один из разрядов кодового многочлена; проверить полученное сообщение; найти и исправить ошибку.

Очевидно, что число информационных разрядов k=4, определим кодовое расстояние r и порождающий многочлен.

Так как d_0=3, то для расчета r можем использовать формулу $r = \lceil \log((k+1) + \lceil \log(k+1) \rceil) \rceil$, r=3. По таблице 1 найдем образующий многочлен – $x^3 + x + 1$ или 1011 (в дальнейшем все многочлены мы записываем, как последовательность коэффициентов в порядке убывания степеней).

Умножив его на одночлен 1000, получим 1101000.

Найдем остаток от деления полученной комбинации на образующий многочлен:

1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	
1	0	1	1								
	1	1	0	0							
	1	0	1	1							
		1	1	1	0						
		1	0	1	1						
			1	0	1	0					
			1	0	1	1					
				0	0	1					

Сложим комбинацию 1101000 с остатком 001:

1	1	0	1	0	0	0
				0	0	1
1	1	0	1	0	0	1

Кодовая комбинация β имеет вид β =1101001,

Внесем ошибку во второй разряд $\overline{\beta}$ =1001001. Для обнаружения и исправления ошибки произведем деление:

1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	
1	0	1	1				1	0	1		
		1	0	0	0						
		1	0	1	1						
				1	1	1					

Так как вес остатка больше одного, то производим циклический сдвиг на один разряд влево с последующим делением на образующий многочлен:

0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	
		1	0	1	1		1				
				1	0	1					

Так как вес остатка больше одного, то производим циклический сдвиг на один разряд влево с последующим делением на образующий многочлен:

0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	
	1	0	1	1			1	0	1		
			1	0	1	0					
			1	0	1	1					
						1					

Так как вес остатка не больше корректирующей способности кода, то производим суммирование по модулю 2, и для получения исправленной комбинации производим циклический сдвиг на 2 разряда вправо:

0	1	0	0	1	1	0
						1
0	1	0	0	1	1	1

Исправленная комбинация $\beta_{исп}$ =1101001.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Закодировать указанные информационные комбинации, построив порождающий и проверочный многочлен. Внести ошибку в один из разрядов кодового многочлена; проверить полученное сообщение; найти и исправить ошибку.

Вариант	Информационные комбинации		
1	01111	101	10000001
2	111	1111000	11110
3	0011	10110	0000100
4	1111	0000110	10101
5	010111	11100011	001
6	011100	1010	1010101010
7	1110	010	010001000
8	1001	110	111001010
9	011	111111110	0100011
Вариант	Информационные комбинации		
10	001	10001010	1111
11	111100001	1010	101
12	11000000	111	00001
13	110	001001	11110111
14	10011	011	011111111
15	001001001	11111	100

ВОПРОСЫ

5. Линейное кодирование. Основные понятия.
6. Порождающая и проверочная матрицы; синдром.
7. Помехоустойчивое кодирование. Основные понятия. Расстояние Хемминга; кодовое расстояние.
8. Коды, порождённые многочленами. Основные понятия.
9. Циклические коды. Основные понятия и свойства.

Практическая работа №6. «Коды БЧХ».

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ) относятся к циклическим кодам с $d_0 \geq 5$, то есть позволяющим исправлять не менее двух ошибок. Методика их построения имеет отличительные особенности в выборе образующего многочлена. Выбор образующего многочлена в основном зависит от длины кода n и числа исправляемых ошибок s. Соотношения длины кода n, числа информационных символов k и количества корректирующих разрядов r приведены в таблице 2. Для, так называемых, примитивных двоичных кодов БЧХ необходимо, чтобы n удовлетворяло условию: $n = 2^h - 1$ для некоторого натурального числа *h*.

Если известна длина кода n, удовлетворяющая указанному выше условию, то $h = \log(n+1)$. Тогда, чтобы построить многочлен g(*x*), порождающий БЧХ код с исправлением s ошибок, необходимо, выбрав произвольный примитивный многочлен P(z) степени *h*, построить поле Галуа GF(2^h) (очевидно, при таком построении z будет примитивным элементом поля GF(2^h)), найти минимальные многочлены $P_i(x)$, (i = 1, 2, …, 2s) для всех нечётных степеней z^i выбранного примитивного элемента и положить g(*x*)=НОК($P_1(x)$,$P_3(x)$, …, $P_{2s-1}(x)$).

На практике, поскольку минимальные многочлены табулированы, можно обойтись без непосредственного построения поля Галуа, как это, например, показано ниже.

Число контрольных символов равно степени образующего многочлена g(x). Построение производится при помощи минимальных многочленов (таблица 3).

h указывает на колонку в таблице минимальных многочленов (таблица 3), из которой производится выбор многочлена P(x).

Так как для построения g(x) используются только нечетные многочлены, то их количество равно числу исправляемых ошибок.

Обнаружение и исправление ошибок производится по той же методике, что и для циклических кодов.

ПРИМЕР

Задание. Закодировать информационную комбинацию α=10011, , построив порождающий многочлен для кода, исправляющего s=3 ошибок при минимальной длине n кодового слова. Внести m = 2 ошибки в кодовую комбинацию; проверить полученное сообщение; найти и исправить ошибки.

Очевидно, что число информационных разрядов k=5.

По таблице 2 находим наименьшее значение n=15 для k=5, s=3.

Тогда h = log16 = 4, следовательно, старшая степень минимального многочлена равна 4.

i=2s-1=5, следовательно из четвертой колонки таблицы 3 выбираем $P_1(x),P_3(x),P_5(x)$.

$g(x) = НОК(P_1(x),P_3(x),P_5(x)) = 10011 \cdot 11111 \cdot 111 = 10100110111$ – образующий многочлен.

r=10, следовательно умножаем информационную комбинацию на x^{10}, а затем делим на образующий многочлен,

```
1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1         |       1 0 1 1
      1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0
      1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
        1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0
        1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
              0 1 1 1 0 0 0 0 1 0
```

β =100110111000010 – кодовая комбинация. Внесем ошибку во второй и третий разряды.

$\overline{\beta}$ =111110111000010

```
1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 | 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1         |       1 1 0 0 1
  1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0
  1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
        1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0
        1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
            1 0 0 0 1 1 1 1 0 1
```

Так как вес остатка больше 3, то произведем циклический сдвиг на один разряд влево, и снова найдем остаток от деления на образующий многочлен:

```
1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 | 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1         |       1 1 0 0 0
  1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0
  1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
          0 1 0 1 0 0 1 1 0 1
```

Вес остатка больше 3, следовательно сдвигаем на второй разряд влево с последующим делением на образующий многочлен:

```
1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 | 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1         |       1 1 0 1 1
  1 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1
  1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
        1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1
        1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
            1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1
            1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
              1 0 1 0 0 1 1 0 1 0
```

Вес остатка снова больше 3, следовательно сдвигаем еще на разряд влево с последующим делением на образующий многочлен:

```
1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 | 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1         |       1 1 1
  1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0
  1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
    1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
    1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1
                      1 1
```

Так как вес остатка не больше корректирующей способности кода, то производим суммирование по модулю 2, и для получения исправленной комбинации производим циклический сдвиг на 3 разряда вправо:

1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
													1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Исправленная комбинация $\beta_{исп}$ =100110111000010.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Закодировать указанные информационные комбинации, построив порождающий многочлен для кода, исправляющего s ошибок при минимальной длине n кодового слова. Внести m ошибок ($m \leq s$) в кодовую комбинацию; проверить полученное сообщение; найти и исправить ошибки.

Вариант	Информационные комбинации		
1	01111 s = 3	1111101 s = 15	1000001 s = 2
2	01010100111 s = 5	1001111000 s = 13	1111110 s = 2
3	1111001110110011 s = 3	01100 s = 3	0011110 s = 2
4	0001101 s = 15	11110100111 s = 5	0111010 s = 2
5	01010111111 s = 5	01010 s = 3	0011110 s = 2
Вариант	Информационные комбинации		
6	00001 s = 3	1000001000 s = 13	1110000 s = 2
7	1101001 s = 15	11111 s = 3	0001110 s = 2
8	0011001110110010 s = 3	01010100000 s = 5	0010011 s = 2
9	1110001 s = 15	10101 s = 3	1111111 s = 2
10	11110 s = 3	1000001110110001 s = 3	1111110 s = 2
11	01010110101 s = 5	1111111 s = 15	0101010 s = 2
12	0001101000 s = 13	01011111111 s = 5	1100111 s = 2

13	0010101 $s = 15$	1101001010110010 $s = 3$	1010000 $s = 2$
14	11001 $s = 3$	0000001 $s = 15$	1000000 $s = 2$
15	11010000111 $s = 5$	1111111000 $s = 13$	0000010 $s = 2$

ВОПРОСЫ

10. Линейное кодирование. Основные понятия.
11. Порождающая и проверочная матрицы; синдром.
12. Помехоустойчивое кодирование. Основные понятия. Расстояние Хемминга; кодовое расстояние.
13. Коды, порождённые многочленами. Основные понятия.
14. Циклические коды. Основные понятия и свойства.
15. Неприводимые, примитивные и минимальные многочлены.
16. Коды Боуза-Чоудхури-Хоквингема.

Приложение.

Таблица 1.

Фрагменты таблицы образующих многочленов.

код[2]	код	код
11	111001	1101101
101	111011	1101111
111	111101	1110001
1001	111111	1110011
1011	1000001	1110101
1101	1000011	1110111
1111	1000101	1111001
10001	1000111	1111011
10011	1001001	1111101
10101	1001011	1111111
10111	1001101	10000001
11001	1001111	11100001
11011	1010001	100000001
11101	1010011	100000011
11111	1010101	1000000001
100001	1010111	1100000001
100011	1011001	10000000001
100101	1011011	100000000001
100111	1011101	100000000011
101001	1011111	100000000101
101011	1100001	1000000000001
101101	1100011	10000000000001
101111	1100101	100000000000011
110001	1100111	100000000000101

[2] Под заголовком код понимается вектор коэффициентов многочлена, например, коду 11 соответствует многочлен x+1, коду 1001 сопоставляется многочлен x^3+1.

110101	1101001	100000000000111
110111	1101011	100000000001001

Таблица 2.

Соотношение корректирующих и информационных разрядов для БЧХ кодов[3].

n	K	r	s	n	k	r	s
7	4	3	1	127	106	21	3
15	11	4	1	127	99	28	4
15	7	8	2	127	92	35	5
15	5	10	3	127	85	42	6
31	26	5	1	127	78	49	7
31	21	10	2	127	71	56	9
31	16	15	3	127	64	63	10
31	11	20	5	127	57	70	11
31	6	25	7	127	50	77	13
63	57	6	1	127	43	84	14
63	51	13	2	127	36	91	15
63	45	18	3	127	29	98	21
63	39	24	4	127	22	105	23
63	36	27	5	127	15	112	27
63	30	33	6	127	8	119	31
63	24	39	7	255	247	8	1
63	18	35	10	255	239	16	2
63	16	37	11	255	231	24	3
63	10	53	13	255	223	32	4
63	7	56	15	255	215	40	5
127	120	7	1	255	207	48	6
127	113	14	2	255	199	56	7

[3] В таблице приняты следующие обозначения: n – длина кода, k – число информационных символов, r – число корректирующих символов, s – число исправляемых ошибок.

Таблица 3.

Минимальные неприводимые многочлены в поле Галуа GF(2).

степень	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	111	1011	10011	100101	1000011	10001001	100011101	1000010001	10000001001
3		1101	11111	111101	1010111	10001111	101110111	1001011001	10000001111
5			111	110111	1100111	10011101	111110011	1100110001	10100001101
7			11001	101111	1001001	11110111	101101001	1010011001	11111111001
9				110111	1101	10111111	110111101	1100010011	10010101111
11				111011	1101101	11010101	111100111	1000101101	10000110101
13						10000011	100101011	1001110111	10001101111
15							111010111	1101100001	10110101011
17							010011	1011011011	11101001101
19						11001011	101100101	1110000101	10111111011
21						11100101	110001011	1000010111	11111101011
23							101100011	1111101001	10000011011
25							100011011	1111100011	10100100011
27							100111111	1110001111	11101111011
29								101101011	10100110001
31									11000100001
33									111101
35								1100000001	11000010011

37							101011111	1001101111	11101100011
39								1111001101	10001000111
41								1101110011	10111100101
43							111000011	1111001011	10100011001
45							100111001	1001111101	11000110001
47									11001111111
49									11101010101
51							011111	1111010101	10101100111
53								1010010101	10110001111
55								1010111101	11100101011
57									11001010001
59									11100111001
61									
63									
65									
67									10111000001
69									11011010011

Таблица 3(продолжение).

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
71								1011	11101000111
73								1111111011	10001011111
75								1101001001	10100001011
77									
79									
81									
83							111	1100010101	11110010011
85								1010110111	10111000111
87									10011001001
89									10011010111
91									11010110101
93									11111111111
95									
97									
99									110111

Список литературы

1. Димтриев В.И. Прикладная теория информации: Учеб. Для студ. Вузов по спец. “Автоматизированные системы обработки информации и управления”. – М.: Высш.шк., 1989. –320с.

2. Темников Ф.Е. и др. Теоретические основы информационной техники. –М.: Энергия, 1979

3. Куликовский Л.Ф. и др. Теоретические основы информационных процессов. –М.: Высш.шк., 1987

4. Цымбал В.П. Теория информации и кодирование. –Киев: Вища школа, 1977

5. Ризаев И.С. Сборник задач по курсу “Теория информации и кодирование”, Казань, КАИ, 1976

6. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. –М.: