Примеры решения задач

(исследование последовательностей операторов на сходимость)

1. Исследовать последовательность операторов $\{A_n\}\subset L(l_2,l_2)$ на равномерную и поточечную сходимость, если $A_n x=\left(\frac{\xi_1}{n},\frac{\xi_2}{n},...,\frac{\xi_k}{n},...\right)$, где $x=(\xi_k)\in l_2$.

Решение: при $n\to\infty$, покоординатно $A_n x\to(0,0,...)=0x$. Проверим, будет ли эта сходимость равномерной:

$$\|A_n-0\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|A_n x-0x\|}{\|x\|}=\sup_{x\neq0}\frac{\|A_n x\|}{\|x\|}=\sup_{x\neq0}\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|^2}{n^2}}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}}=\frac{1}{n}\sup_{x\neq0}\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2}}=\frac{1}{n}\to0,$$

таким образом, указанная последовательность операторов сходится к нулевому оператору равномерно, а значит и поточечно.

2. Исследовать последовательность операторов $\{A_n\}\subset L(l_2,l_2)$ на равномерную и поточечную сходимость, если $A_n x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,0...)$, $x=(\xi_k)\in l_2$.

Решение: при $n\to\infty$, покоординатно $A_n x\to(\xi_1,\xi_2,...,\xi_k,\xi_{k+1},...)=Ix$, где I – тождественный оператор (т.е. $\forall x\quad Ix=x$). Проверим, будет ли эта сходимость равномерной: $\|A_n-I\|=\sup\limits_{x\neq0}\frac{\|A_n x-Ix\|}{\|x\|}\geq\frac{\|A_n x_n-Ix_n\|}{\|x_n\|}=\frac{\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}\right|^2}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}\right|^2}}=\left|x_n=(0,...,0,\underset{n+1}{1},0,...)\right|=1,$

значит, последовательность $\{A_n\}$ не сходится к I равномерно. Выясним, сходится ли $\{A_n\}$ к I поточечно. Берем $\forall x\in l_2$, тогда $\|A_n x-Ix\|=\sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^2}\to0$, как остаток сходящегося ряда. Значит, $A_n\to I$.

3. Исследовать последовательность операторов $A_n x(t)=t^n(1-t)x(t)$, где $\{A_n\}\subset L(C[0,1],C[0,1])$, на равномерную и поточечную сходимость.

Решение: поскольку $\forall x(t)\in C[0,1]\quad A_n x(t)\to0=0x(t)$, то проверим равномерную сходимость: $\|A_n-0\|=\sup\limits_{x\neq0}\frac{\|A_n x-0x\|}{\|x\|}=\sup\limits_{x\neq0}\frac{\|A_n x\|}{\|x\|}=\sup\limits_{x\neq0}\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|t^n(1-t)x(t)\right|}{\|x\|}\leq$

$$\le \sup_{x\ne 0}\frac{\|x\|\sup\limits_{t\in[0,1]} t^n(1-t)}{\|x\|}=\sup_{t\in[0,1]} t^n(1-t).$$ Найдем $\sup\limits_{t\in[0,1]} t^n(1-t)$. Для этого обозначим $f(t)=t^n(1-t)$ и заметим, что в концах отрезка данная функция принимает нулевые значения, т.е. наибольшее ее значение достигается в критической точке.

Поскольку $f'(t)=nt^{n-1}(1-t)-t^n=t^{n-1}(n-nt-t)=0$, то $t=\dfrac{n}{n+1}\in[0,1]$, тогда

$$\sup_{t\in[0,1]} t^n(1-t)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \text{ и } \|A_n-0\|\le\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\to 0,$$

т.е. последовательность операторов сходится равномерно и поточечно.

4. Исследовать последовательность операторов $A_nx(t)=n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)d\tau$, где $\{A_n\}\subset L(C[0,1],C[0,1])$, на равномерную и поточечную сходимость.

Замечание: значения $x\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $n>N\in\mathbb{N}$ получаются продолжением функции $x(t)$ непрерывным образом (та же зависимость $x(t)$, что и на $[0,1]$).

Решение: пусть $F(t)$ – первообразная для $x(t)$, тогда $A_nx(t)=n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)d\tau=$

$$=nF(\tau)\Big|_t^{t+\frac{1}{n}}=\frac{F\left(t+\frac{1}{n}\right)-F(t)}{\frac{1}{n}}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{n}=m\\ m\to 0\end{array}\right|=\frac{F(t+m)-F(t)}{m}\underset{m\to 0}{\to}F'(t)=x(t)=Ix(t).$$ Исследуем поточечную сходимость $\{A_n\}$ к I.

Легко видеть, что $\|A_n\|\le 1$ и $A_n(1)=1=I(1)$, $A_n(t^{k-1})\underset{n\to\infty}{\overset{C[0,1]}{\to}}t^{k-1}=I(t^{k-1})$, $k>1$. Поскольку, в силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, линейные комбинации функций $\{1,t,t^2,...\}$ всюду плотны в $C[0,1]$, то, по теореме Банаха-Штейнгауза, последовательность $A_nx(t)$ сходится к единичному оператору поточечно. Проверим равномерную сходимость:

$$\|A_n-I\|=\sup_{x\ne 0}\frac{\|A_nx-Ix\|}{\|x\|}\ge\frac{\|A_nx_n-Ix_n\|}{\|x_n\|}=\frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}}x_n(\tau)d\tau-x_n(t)\right|}{\|x_n\|}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x_n(t)=t^{n-1},\ (n\ge 2)\\ \|x_n\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|t^{n-1}\right|=1\end{array}\right|=\sup_{t\in[0,1]}\left|n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}}\tau^{n-1}d\tau-t^{n-1}\right|=\sup_{t\in[0,1]}\left|\tau^n\Big|_t^{t+\frac{1}{n}}-t^{n-1}\right|=$$

$$= \sup_{t\in[0,1]}\left|\left(t+\frac{1}{n}\right)^n - t^n - t^{n-1}\right| = \sup_{t\in[0,1]}\left|t^n + t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2n^2}t^{n-2} + \ldots + \frac{1}{n^n} - t^n - t^{n-1}\right| =$$

$$= \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{n(n-1)}{2n^2}t^{n-2} + \ldots + \frac{1}{n^n}\right| \geq \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{n(n-1)}{2n^2}t^{n-2}\right| = \frac{n-1}{2n} > \frac{1}{3} \text{ при } n>3,$$

значит, равномерно данная последовательность не сходится.

5. Исследовать последовательность операторов $A_n x(t) = t^n x(t)$, где $\{A_n\} \subset L(C[0,1], C[0,1])$, на равномерную и поточечную сходимость.

Решение: для произвольной фиксированной функции $x_0(t) \in C[0,1]$ $t^n x_0(t) \to \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ x_0(1), & t = 1 \end{cases}$, поэтому при $x_0(1) \neq 0$ получаем, что последовательность функций $t^n x_0(t)$ сходится отрезке $[0,1]$ поточечно к разрывной функции, поэтому равномерно на отрезке $[0,1]$ сходиться не может.

Если $A_n x(t) \to Ax(t)$, то, в частности $\|A_n x_0(t) - Ax_0(t)\| \to 0$, откуда получаем, что $A_n x_0(t) \underset{n\to\infty}{\overset{t\in[0,1]}{\rightrightarrows}} Ax_0(t)$ – противоречие. Таким образом, последовательность операторов не может поточечно (и равномерно) сходиться в $L(C[0,1], C[0,1])$.

6. Пусть X – банахово пространство, $A \in L(X,X)$, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ $(\lambda_k \in \mathbb{R})$ – сходящийся на всем $\mathbb{R}$ степенной ряд. Доказать, что последовательность $S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k$ имеет при $n \to \infty$ предел $\varphi(A) \in L(X,X)$. При каком условии на числовую последовательность $\{\lambda_k\}$ выполняется оценка $\|\varphi(A)\| \le \varphi(\|A\|)$?

Решение: заметим, что $A^0 = I$, и, кроме того, по теореме об ограниченности произведения $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|A^n\| \le \|A\|^n$. Зададим оператор $\varphi(A)$ формальным соотношением $\varphi(A)x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$ $\forall x \in X$. Необходимо установить корректность этой формулы, т.е., что ряд, стоящий справа, сходится в пространстве X.

Согласно критерию полноты линейного пространства в терминах рядов, в банаховом пространстве всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, поэтому достаточно проверить абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$.

Поскольку $\|\lambda_k A^k\| \le |\lambda_k| \cdot \|A\|^k$, а степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ сходится на $\mathbb{R}$, то он сходится и абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \cdot \|A\|^k$, поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$ сходится абсолютно. Таким образом, указанный ряд сходится в пространстве X, и оператор $\varphi(A)x=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x$ действительно задан корректно. Т.к. $A\in L(X,X)$, то A – линеен и ограничен, откуда очевидным образом устанавливается, что оператор $\varphi(A)$ также линеен. Далее, $\forall x\in X$

$$\|\varphi(A)x\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|\le\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\lambda_k A^k x\right\|\le\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\left\|A^k\right\|\cdot\|x\|\le\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\cdot\|x\|=c\|x\|,$$

таким образом, $\varphi(A)$ ограничен. Итак, $\varphi(A)\in L(X,X)$.

Покажем, что $S_n(A)\rightrightarrows\varphi(A)$ при $n\to\infty$ в $L(X,X)$:

$$\|S_n(A)-\varphi(A)\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|S_n(A)x-\varphi(A)x\|}{\|x\|}=\sup_{x\neq0}\frac{\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k A^k x-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|}{\|x\|}=$$

$$=\sup_{x\neq0}\frac{\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|}{\|x\|}\le\sup_{x\neq0}\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\|x\|}{\|x\|}=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\underset{n\to\infty}{\to}0,$$

как остаток сходящегося ряда. Далее,

$$\|\varphi(A)\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|\varphi(A)x\|}{\|x\|}=\sup_{x\neq0}\frac{\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k A^k x\right\|}{\|x\|}\le\sup_{x\neq0}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\|x\|}{\|x\|}=\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k,$$

откуда $\varphi(\|A\|)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\|A\|^k=\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|A\|^k\ge\|\varphi(A)\|$ при $\lambda_k\ge0\ \ \forall k\in\mathbb{N}$.