Решение простых дифференциальных уравнений

Первый тип задач который будет рассмотрен - это решение простых дифференциальных уравнений первого порядка в виде:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \tag{0.1}$$

$$y(t_0) = y_0, \tag{0.2}$$

где начальное значение y_0 в момент времени t_0, также как и производная по времени f(y,t) известны. Задача об остывании кофе

$$\frac{dT}{dt} = -\gamma(T - T_{room}), \tag{0.3}$$

где T - это температура чашки с кофе, T_{room} - температура в комнате и γ - это коэффициент остывания. Этот коэффициент остывания зависит от механизма теплопередачи, площади тела, находящегося в контакте со средой и тепловых свойств самого тела. Знак минус появляется во избежании не физического эффекта увеличения температуры тела T, когда $T > T_{room}$. Уравнение (0.3) называется законом теплопроводности Ньютона. Аналитическое решение может быть найдено следующим образом

$$\frac{dT}{T - T_{room}} = -\gamma dt, \tag{0.4}$$

интегрируя обе части этого уравнения

$$\int_{T(0)}^{T(t)} \frac{dT}{T - T_{room}} = -\gamma \int_0^t dt, \tag{0.5}$$

вычисляем интеграл

$$\ln(T(t) - T_{room}) - \ln(T(0) - T_{room}) = -\gamma t, \tag{0.6}$$

и решая полученное уравнение для T(t) получаем:

$$T(t) = T_{room} + (T(0) - T_{room})exp(-\gamma t) \tag{0.7}$$

В то время как два главных шага, вычисление интеграла (0.5) и решение уравнения (0.6) могут быть легко проделаны аналитически, в случае более сложных дифференциальных уравнений это не так. Здесь на помощь приходит метод Эйлера, который сохраняет свою простоту вне зависимости к каким дифференциальным уравнениям мы его применяем. Численно значение y в следующий момент времени $t + \Delta t$ могут быть аппроксимированы рядом Тейлора до членов первого порядка:

$$T(t_0 + \Delta t) = T(t_0) + \Delta t \frac{dT}{dt} = T_0 + \Delta t f(T_0, t_0) + O(\Delta t^2) \tag{0.8}$$

Применяя итерационную процедуру для этого уравнения, вводя обозначения $t_n = t_0 + n\Delta t$ и $T_n = T(t_n)$ мы получаем запись алгоритма Эйлера для уравнения теплопроводности:

$$T_{n+1} = T_n + \Delta t f(T_n, t_n) + O(\Delta t^2) \tag{0.9}$$