Глава 2.

Принцип максимума

2.1. Система уравнений в вариациях

В этом параграфе приводятся вспомогательные построения и утверждения, которые в дальнейшем будут использоваться для вывода необходимых условий экстремума в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина для задачи 1.1.

Предположим, что рассматриваются произвольное допустимое управление $u = u^o(t)$ и порождаемое им движение $x^o(t)$ системы (1.22), изображенные на рис. 1.1, 1.2. Выберем произвольную точку $\tau \in (t_o, t_1)$, в которой управление $u^o(t)$ непрерывно. Следовательно, существует достаточно малое положительное число α такое, что управление $u^o(t)$ непрерывно на отрезке $[\tau - \alpha, \tau]$. Введем в рассмотрение на отрезке $[t_o, t_1]$ **варьированное** управление $u^o_\alpha(t)$ следующим образом:

$$u^o_\alpha(t) = \begin{cases} u^o(t) & , \ t \notin [\tau - \alpha, \tau), \\ v & , \ t \in [\tau - \alpha, \tau), \end{cases} \tag{2.1}$$

где v — произвольный фиксированный вектор из области управления U.

Варьированное управление $u^o_\alpha(t)$ является допустимым и совпадает с исходным $u^o(t)$ всюду за исключением полуинтервала $[\tau - \alpha, \tau)$, на котором оно постоянно и равно произвольному вектору из области управления. Обозначим через $x^o_\alpha(t)$ порождаемое им варьированное движение. Исходные и варьированные управления и движения изображены ниже на рис. 2.1 и 2.2.

Вычислим отклонение варьированного движения $x^o_\alpha(t)$ от исходного $x^o(t)$, вызванное вариацией управления $u^o(t)$ при бесконечно малых значениях параметра α. Для этого предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 2.1. *Функции $f(t,x,u)$, $\omega(t,x,u)$, $\varphi(x)$, упомянутые в постановке задачи 1.1, и их частные производные*

$$\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega(t,x,u)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$$

определены и непрерывны по всем переменным при $t \in [t_o, t_1]$, $x \in R^n$, $u \in U \subset R^m$.

Здесь приняты следующие обозначения

$$\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(t,x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(t,x,u)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(t,x,u)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(t,x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(t,x,u)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_21(t,x,u)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(t,x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(t,x,u)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(t,x,u)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \omega(t,x,u)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega(t,x,u)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \omega(t,x,u)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \omega(t,x,u)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

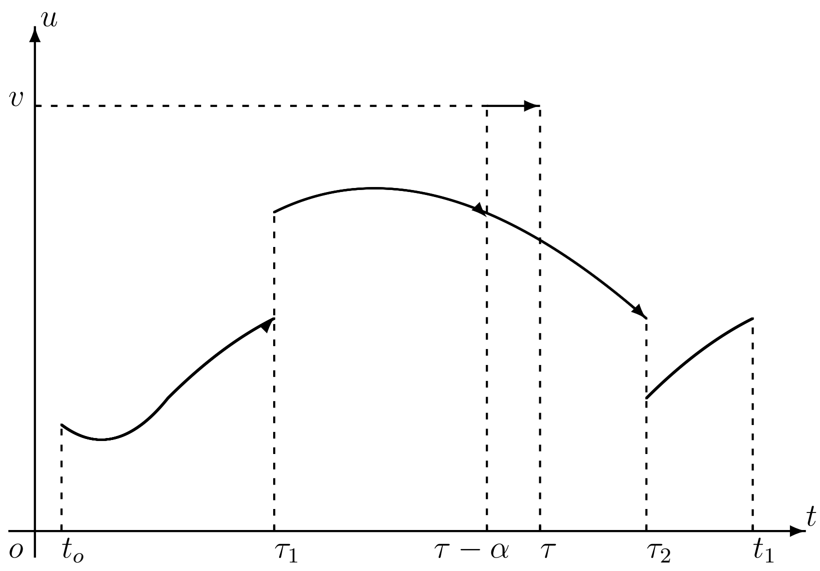

Рис. 2.1. Допустимое $u = u^o(t)$ и варьированное $u = u^o_\alpha(t)$ управления

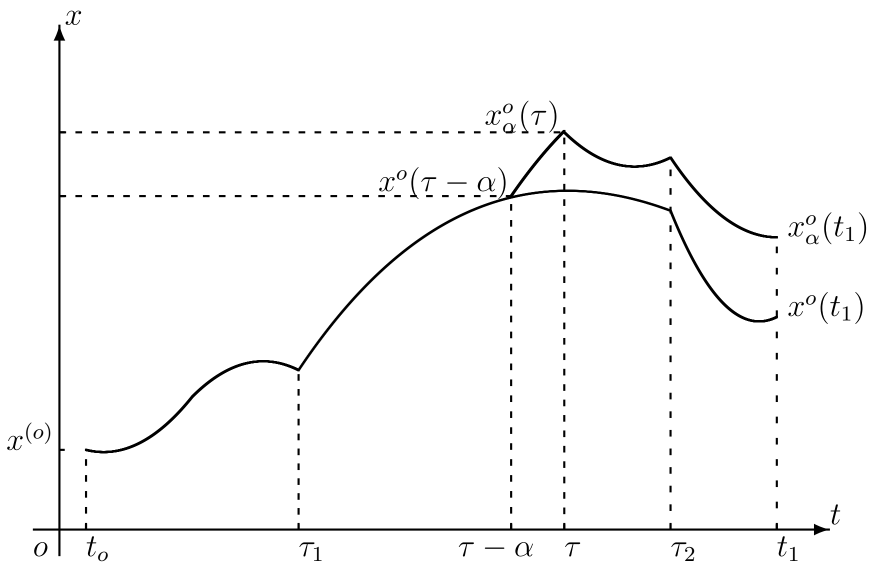

Рис. 2.2. Допустимое $x^o(t) = x^o(t, t_o, x^{(o)}; u^o)$ и варьированное $x^o_\alpha(t) = x^o_\alpha(t, t_o, x^{(o)}; u^o_\alpha)$ движения

На полуинтервале $[t_o, \tau-\alpha)$ исходное и варьированное управления совпадают, порождаемые ими исходное и варьированное движения системы (1.22) начинаются в одной и той же точке, следовательно, справедливо тождество $x^o_\alpha(t) \equiv x^o(t)$ при $t \in [t_o, \tau-\alpha]$, и в частности

$$x^o_\alpha(\tau-\alpha) = x^o(\tau-\alpha).$$

При достаточно малых значениях параметра α управление $u^o(t)$ и производная $\dot{x}^o(t)$ непрерывны на отрезке $[\tau-\alpha,\tau]$, поэтому по формуле конечных приращений получаем

$$x_i^o(\tau) = x_i^o((\tau-\alpha)+\alpha) = x_i^o(\tau-\alpha) + \alpha\,\dot{x}_i^o(\tau-\alpha) +$$

$$+\,\alpha\,[\dot{x}_i^o(\tau-\alpha+\vartheta_i\alpha) - \dot{x}_i^o(\tau-\alpha)],$$

$$(i=1,\ldots,n),\ \vartheta_i \in (0,1),$$

кроме того, при любом i

$$\lim_{\alpha\to+0}[\dot{x}_i^o(\tau-\alpha+\vartheta_i\alpha) - \dot{x}_i^o(\tau-\alpha)] = 0.$$

Таким образом, справедливо векторное равенство

$$x^o(\tau) = x^o(\tau-\alpha) + \alpha\dot{x}^o(\tau-\alpha) + o(\alpha),$$

где символ $o(\alpha)$ означает величину более высокого порядка малости, чем α, т. е.

$$\lim_{\alpha\to+0} o(\alpha)/\alpha = 0.$$

Производная $\dot{x}^o(t)$ непрерывна на отрезке $[\tau-\alpha,\tau]$, поэтому имеет место тождество (1.21), используя которое окончательно получаем равенство

$$x^o(\tau) = x^o(\tau-\alpha) + \alpha f(\tau-\alpha, x^o(\tau-\alpha), u^o(\tau-\alpha)) + o(\alpha). \quad (2.2)$$

На полуинтервале $[\tau-\alpha,\tau)$ варьированное управление постоянно, производная $\dot{x}_\alpha^o(t)$ непрерывна и удовлетворяет тождеству

$$\frac{dx_\alpha^o(t)}{dt} \equiv f(t, x_\alpha^o(t), v).$$

При этих условиях по-прежнему справедлива формула конечных приращений и, повторяя предыдущие рассуждения, найдем

$$x_\alpha^o(\tau) = x_\alpha^o(\tau-\alpha) + \alpha\dot{x}_\alpha^o(\tau-\alpha) + o_1(\alpha) =$$

$$= x^o(\tau-\alpha) + \alpha\dot{x}_\alpha^o(\tau-\alpha) + o_1(\alpha),$$

где $o_1(\alpha)$ — величина более высокого порядка малости, чем α. Поэтому

$$x^o_\alpha(\tau) = x^o(\tau-\alpha) + \alpha f(\tau-\alpha, x^o(\tau-\alpha), v) + o_1(\alpha). \tag{2.3}$$

Опираясь на равенства (2.2), (2.3), вычислим величину

$$y(\tau) = \lim_{\alpha\to+0} [x^o_\alpha(\tau) - x^o(\tau)]/\alpha =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} [f(\tau-\alpha, x^o(\tau-\alpha), v) - f(\tau-\alpha, x^o(\tau-\alpha), u^o(\tau-\alpha))].$$

В точке $t=\tau$ управление $u^o(t)$ и движение $x^o(t)$ непрерывны, выполнено условие 2.1, следовательно,

$$y(\tau) = f(\tau, x^o(\tau), v) - f(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)). \tag{2.4}$$

По определению варьированного управления $u^o_\alpha(t)$ на отрезке времени $[\tau, t_1]$ движения $x^o(t)$ и $x^o_\alpha(t)$ суть решения одного и того же дифференциального уравнения

$$\dot{x} \;=\; f(t, x, u^o(t)) \tag{2.5}$$

при различных начальных условиях $\{t=\tau,\, x(t)=x^o(\tau)\}$ и $\{t=\tau,\, x(t)=x^o_\alpha(\tau)\}$ соответственно, причем по доказанному

$$x^o_\alpha(\tau) = x^o(\tau) + \alpha\, y(\tau) + o(\alpha). \tag{2.6}$$

Воспользуемся теперь тем, что правая часть системы дифференциальных уравнений (2.5) по условию есть непрерывно дифференцируемая функция переменных x_i, $(i=1,\ldots,n)$. Поэтому из теорем [23, 26, 28] о непрерывности и дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по начальным данным следует, что равномерно относительно $t\in[\tau, t_1]$ выполняются предельные соотношения

$$\lim_{\alpha\to+0} x^o_\alpha(t) = x^o(t), \quad y(t) = \lim_{\alpha\to+0} [x^o_\alpha(t) - x^o(t)]/\alpha. \tag{2.7}$$

Вычислим функцию $y(t)$ при $t > \tau$, для этого запишем интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции $x^o_\alpha(t)$ и $x^o(t)$ как решения дифференциальных уравнений (2.5)

$$x^o_\alpha(t) = x^o_\alpha(\tau) + \int_\tau^t f(\xi, x^o_\alpha(\xi), u^o(\xi))\, d\xi,$$

$$x^o(t) = x^o(\tau) + \int_\tau^t f(\xi, x^o(\xi), u^o(\xi))\, d\xi.$$

Из этих равенств получаем

$$y(t) = \lim_{\alpha\to+0} \left\{ \frac{[x^o_\alpha(\tau) - x^o(\tau)]}{\alpha} \right. +$$

$$\left. + \int_\tau^t \frac{1}{\alpha}[f(\xi, x^o_\alpha(\xi), u^o(\xi)) - f(\xi, x^o(\xi), u^o(\xi))]\, d\xi \right\} =$$

$$= y(\tau) + \int_\tau^t \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}[f(\xi, x^o_\alpha(\xi), u^o(\xi)) - f(\xi, x^o(\xi), u^o(\xi))]\, d\xi.$$

Операции интегрирования и предельного перехода здесь перестановочны, так как выполнено условие 2.1 и предельные соотношения (2.7) выполняются равномерно относительно $t \in [\tau, t_1]$. Вычисляя предел во втором слагаемом, получим

$$y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t \frac{\partial f(\xi, x^o(\xi), u^o(\xi))}{\partial x}\, y(\xi)\, d\xi.$$

Следовательно, функция $y = y(t)$ является решением системы уравнений в вариациях [23]

$$\dot{y} = \frac{\partial f(t, x^o(t), u^o(t))}{\partial x}\, y \tag{2.8}$$

при начальном условии $\{t = \tau, y = y(\tau)\}$, где вектор $y(\tau)$ определен равенством (2.4).

Таким образом, приходим к следующему выводу.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия 2.1, (1.19) и пусть варьированное управление $u^o_\alpha(t)$, отвечающее произвольному допустимому управлению $u = u^o(t)$ в системе (1.22), определяется равенством (2.1), тогда при $t \geqslant \tau$ варьированное $x = x^o_\alpha(t)$ и исходное $x = x^o(t)$ движения связаны соотношением*

$$x^o_\alpha(t) = x^o(t) + \alpha\, y(t) + o(\alpha, t),$$

где функция $y = y(t)$ является решением системы уравнений в вариациях (2.8) при начальном условии $\{t = \tau,\, y = y(\tau)\}$, в котором вектор $y(\tau)$ определен равенством (2.4), при этом равномерно относительно $t \in [\tau, t_1]$

$$\lim_{\alpha\to+0} o(\alpha, t)/\alpha = 0.$$

2.2. Вывод принципа максимума

Рассмотрим теперь вывод необходимых условий оптимальности управления в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина для задачи 1.1 с подвижными границами. Введем в рассмотрение функцию Понтрягина, через которую выражаются необходимые условия экстремума в задачах оптимального управления:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi^\top f(t, x, u) - \omega(t, x, u). \tag{2.9}$$

Здесь $\psi \in R^n$ - вспомогательный вектор; верхний индекс $\top$ означает транспонирование, т.е.

$$H(t, x, \psi, u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(t, x, u) - \omega(t, x, u).$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия 2.1, (1.19) и пусть $\{x^o(t), u^o(t)\}$, $t \in [t_o, t_1]$, — оптимальный процесс в управляемой системе (1.22), когда качество процесса управления оценивается функционалом (1.23), тогда $H(t, x^o(t), \psi^o(t), u)$ как* *функция переменной $u \in U$ в каждой точке t непрерывности управления $u^o(t)$ имеет максимум при $u = u^o(t)$, т. е.*

$$H(t, x^o(t), \psi^o(t), u^o(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^o(t), \psi^o(t), u), \qquad (2.10)$$

где функции $x^o(t)$, $\psi^o(t)$ являются решением канонической системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t))}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t))}{\partial x} \qquad (2.11)$$

при краевых условиях

$$x(t_o) = x^{(o)}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}. \qquad (2.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выведем сначала вспомогательное равенство. Запишем в развернутом виде тождество, которому удовлетворяет кусочно-дифференцируемая функция $\psi^o(t)$ как решение второго уравнения канонической системы (2.11)

$$\dot{\psi}^o(t) \equiv -\left[\frac{\partial f(t, x^o(t), u^o(t))}{\partial x}\right]^\top \psi^o(t) + \frac{\partial \omega(t, x^o(t), u^o(t))}{\partial x}. \qquad (2.13)$$

Рассмотрим скалярное произведение $[\psi^o(t)]^\top y(t)$ при $t \in [\tau, t_1]$, где $y(t)$ — решение системы уравнений в вариациях (2.8). Вычислим производную

$$\frac{d[\psi^o(t)]^\top y(t)}{dt} = [\dot{\psi}^o(t)]^\top y(t) + [\psi^o(t)]^\top \dot{y}(t).$$

Из (2.8), (2.13) следует

$$\frac{d[\psi^o(t)]^\top y(t)}{dt} = \left[\frac{\partial \omega(t, x^o(t), u^o(t))}{\partial x}\right]^\top y(t).$$

Интегрируя это равенство по $t \in [\tau, t_1]$, найдем

$$[\psi^o(t_1)]^\top y(t_1) - [\psi^o(\tau)]^\top y(\tau) = \int_\tau^{t_1} \left[\frac{\partial \omega(t, x^o(t), u^o(t))}{\partial x}\right]^\top y(t)\, dt.$$

Используя граничное условие в (2.12), получим

$$\int_{\tau}^{t_1} \left[\frac{\partial\omega(t, x^o(t), u^o(t))}{\partial x}\right]^{\top} y(t)\,dt + \left[\frac{\partial\varphi(x^o(t_1))}{\partial x}\right]^{\top} y(t_1) = \\ = -[\psi^o(\tau)]^{\top} y(\tau). \tag{2.14}$$

Воспользуемся тем, что $\{x^o(t), u^o(t)\}$, $t \in [t_o, t_1]$, — оптимальный процесс. Следовательно,

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{I[u^o_\alpha] - I[u^o]}{\alpha} \geqslant 0.$$

Вычислим предел в левой части последнего неравенства. Очевидно, что он равен

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int_{\tau-\alpha}^{\tau} [\omega(t, x^o_\alpha(t), v) - \omega(t, x^o(t), u^o(t))]\,dt+$$

$$+\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int_{\tau}^{t_1} [\omega(t, x^o_\alpha(t), u^o(t)) - \omega(t, x^o(t), u^o(t))]\,dt+$$

$$+\lim_{\alpha\to+0} \frac{[\varphi(x^o_\alpha(t_1)) - \varphi(x^o(t_1))]}{\alpha} \geqslant 0.$$

Применив теорему о среднем, получим

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int_{\tau-\alpha}^{\tau} [\omega(t, x^o_\alpha(t), v) - \omega(t, x^o(t), u^o(t))]\,dt =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} [\omega(t^*, x^o_\alpha(t^*), v) - \omega(t^*, x^o(t^*), u^o(t^*))] =$$

$$= \omega(\tau, x^o_\alpha(\tau), v)) - \omega(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)),$$

поскольку

$$t^* \in (\tau - \alpha, \tau), \quad \lim_{\alpha\to+0} t^* = \tau.$$

Аналогично рассуждениям, приведенным в параграфе 2.1 на стр. 33, получим

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int_{\tau}^{t_1} [\omega(t, x^o_\alpha(t), u^o(t)) - \omega(t, x^o(t), u^o(t))]\,dt =$$

$$= \int_{\tau}^{t_1} \left[\frac{\partial\omega(t, x^o(t), u^o(t))}{\partial x}\right]^\top y(t)\, dt,$$

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{[\varphi(x^o_\alpha(t_1)) - \varphi(x^o(t_1))]}{\alpha} = \left[\frac{\partial\varphi(x^o(t_1))}{\partial x}\right]^\top y(t_1).$$

Из этих предельных соотношений и равенства (2.14) следует, что

$$\omega(\tau, x^o_\alpha(\tau), v) - \omega(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) - [\psi^o(\tau)]^\top y(\tau) \geqslant 0.$$

В левую часть этого неравенства подставим вектор $y(\tau)$, (2.4) и запишем его в виде

$$[\psi^o(\tau)]^\top f(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) - \omega(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \geqslant$$
$$\geqslant [\psi^o(\tau)]^\top f(\tau, x^o(\tau), v) - \omega(\tau, x^o_\alpha(\tau), v).$$

По построению варьированного управления полученное неравенство выполняется в каждой точке τ непрерывности управления $u^o(\tau)$ при любом $v \in U$, поэтому из (2.9) следует условие максимума (2.10), что и завершает доказательство теоремы 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия 2.1, (1.19) и пусть* $\{x^o(t), u^o(t)\}$, $t \in [t_o, t_1]$, *— оптимальный процесс в управляемой системе (1.22), когда качество процесса управления оценивается функционалом (1.23), тогда функция*

$$H^o[t] = H(t, x^o(t), \psi^o(t), u^o(t)) = \max_{u\in U} H(t, x^o(t), \psi^o(t), u) \quad (2.15)$$

непрерывна на отрезке $[t_o, t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau_1 \in (t_o, t_1)$ - точка разрыва оптимального управления $u^o(t)$, а t - точка его непрерывности, достаточно близкая к τ_1. Функция $u^o(t)$, по принятому соглашению, непрерывна справа, поэтому

$$H^o[\tau_1 + 0] = \lim_{t\to\tau_1+0} H^o[t] = H^o[\tau_1].$$

По определению (2.15) при любом $u \in U$ имеем

$$H(t, x^o(t), \psi^o(t), u) \leqslant H^o[t],$$

поэтому

$$H(\tau_1, x^o(\tau_1), \psi^o(\tau_1), u) \leqslant \lim_{t \to \tau_1 - 0} H^o[t] = H^o[\tau_1 - 0],$$

$$H^o[\tau_1] = \max_{u \in U} H(\tau_1, x^o(\tau_1), \psi^o(\tau_1), u) \leqslant H^o[\tau_1 - 0].$$

С другой стороны,

$$H^o[\tau_1 - 0] = \lim_{t \to \tau_1 - 0} H(t, x^o(t), \psi^o(t), u^o(t)) =$$

$$= H(\tau_1, x^o(\tau_1), \psi^o(\tau_1), u^o(\tau_1 - 0)) \leqslant H^o[\tau_1].$$

Таким образом, $H^o[\tau_1 + 0] = H^o[\tau_1] = H^o[\tau_1 - 0]$, т.е. функция $H^o[t]$ непрерывна в точке $t = \tau_1$ разрыва оптимального управления $u^o(t)$, что и доказывает справедливость утверждения теоремы 2.3.

Подчеркнем, что, очевидно, аналогичным образом можно доказать непрерывность справа функции $H^o[t]$ при $t = \tau_1$, отказавшись от предположения о непрерывности справа управляющего воздействия $u^o(t)$, которое удобно использовать в практических приложениях теории управления. Во всех приведенных выше рассуждениях значение допустимого управления в точке разрыва не играет никакой роли.

Вывод необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума для задачи 1.2 с неподвижными границами намного сложнее, чем доказательство теоремы 2.2. Это объясняется тем, что в определении (2.1) варьированного управления вектор $v \in U$ не может быть произвольным, так как необходимо сравнивать различные допустимые управления, которые переводят систему (1.22) в заданную точку. Это обстоятельство приводит к необходимости существенного усложнения понятия вариации управления и вспомогательного математического аппарата [22], который необходим для доказательства. Поэтому приведем формулировку принципа максимума для задачи с неподвижными границами без доказательства.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия 2.1, (1.19) и пусть* $\{x^o(t), u^o(t)\}$, $t \in [t_o, t_1]$, *— оптимальный процесс в управляемой системе (1.22), когда качество процесса управления оценивается функционалом (1.25), тогда* $H(t, x^o(t), \psi^o(t), u)$ *как функция переменной* $u \in U$ *в каждой точке* t *непрерывности управления* $u^o(t)$ *имеет максимум при* $u = u^o(t)$, *т. е.*

$$H(t, x^o(t), \psi^o(t), u^o(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^o(t), \psi^o(t), u), \tag{2.16}$$

где функции $x^o(t)$, $\psi^o(t)$ *являются решением канонической системы дифференциальных уравнений:*

$$\dot{x} = \frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t))}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t))}{\partial x} \tag{2.17}$$

при краевых условиях

$$x(t_o) = x^{(o)}, \quad x(t_1) = x^{(1)}. \tag{2.18}$$

Мы видим, что основное содержание принципа максимума сохранилось, изменились только краевые условия.

2.3. Краевая задача принципа максимума

Принцип максимума как необходимое условие экстремума используется для вычисления экстремальных процессов, т. е. процессов, на которых может достигаться решение задачи 1.1. Пусть функция $u^o(t, x, \psi)$ является единственным решением задачи

$$H(t, x, \psi, u^o(t, x, \psi)) = \max_{u \in U} H(t, x, \psi, u). \tag{2.19}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t, x, \psi))}{\partial \psi}, \ \dot{\psi} = -\frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t, x, \psi))}{\partial x} \quad (2.20)$$

при краевых условиях

$$x(t_o) = x^{(o)}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Пусть функции $x = x^o(t)$ и $\psi = \psi^o(t)$ являются решением краевой задачи (2.20), (2.21) и пусть $u = u^o(t) = u^o(t, x^o(t), \psi^o(t)))$. По построению процесс $\{x^o(t), u^o(t)\}$ удовлетворяет условиям принципа максимума. Поскольку формулировка принципа максимума содержит только необходимое условие оптимальности, то возникает, как правило, весьма трудная проблема доказательства оптимальности экстремального процесса $\{x^o(t), u^o(t)\}$. Эта проблема осложняется еще тем, что краевая задача (2.20), (2.21) может иметь единственное решение, или некоторое конечное или бесконечное множество решений, или не иметь решений. Поэтому в теории оптимального управления большое значение имеют теоремы о существовании решения и теоремы о существовании единственного решения. Этому вопросу посвящено огромное количество исследований. Например, большое внимание проблеме существования решения задачи 1.1 оптимального управления уделяется в монографии [19]. Сравнительно просто обсуждаемая проблема решается в случае, когда система (1.17) линейна и функционал (1.23) квадратичен. Такие ситуации будут рассмотрены ниже.

В общем нелинейном случае, даже если выполнены условия существования единственного решения задачи 1.1, краевая задача (2.20), (2.21) может иметь не единственное решение. В таких случаях для доказательства оптимальности экстремального процесса $\{x^o(t), u^o(t)\}$ необходимы еще условия существования единственного решения краевой задачи (2.20), (2.21). К сожалению, общих подходов для получения ответа не имеется, и в каждом конкретном случае необходимо проводить рассуждения, которые учитывают специфику рассматриваемой задачи и опираются на ее содержательный смысл.

Отметим, что еще большие трудности возникают, когда максимум в (2.19) достигается на некотором множестве

$$U^o(t, x, \psi) \subseteq U.$$

Тогда в правую часть уравнений (2.20) необходимо подставлять произвольную функцию, удовлетворяющую включению

$$u^o(t, x, \psi) \in U^o(t, x, \psi)$$

при всех $\{t, x, \psi\}$. Следовательно, правая часть системы уравнений (2.20) становится многозначной и для ее исследования необходимо применять существенно более сложный математический аппарат [28].

Обсудим кратко основные трудности, которые возникают при численном решении краевой задачи (2.20), (2.21) в нелинейном случае. Выберем произвольный вектор $\psi^{(o)}$ и рассмотрим задачу Коши для канонической системы (2.20) при начальном условии

$$x(t_o) = x^{(o)},\ \psi(t_o) = \psi^{(o)}.$$

Для вычисления решения задачи Коши можно использовать любой численный метод, известный в теории дифференциальных уравнений. В результате получим

$$x(t_1) = f_1(\psi^{(o)}),\ \psi(t_1) = f_2(\psi^{(o)}).$$

Таким путем построение решения краевой задачи (2.20), (2.21) сводится к вычислению корней нелинейной системы алгебраических уравнений

$$f_2(\psi^{(o)}) + \frac{\partial \varphi(f_1(\psi^{(o)})))}{\partial x} = 0. \qquad (2.22)$$

Практическое осуществление такой, естественной на первый взгляд, процедуры во многих случаях весьма затруднительно по следующим причинам:

1. Не существует универсального метода решения конечномерной экстремальной задачи (2.19) на поиск максимума.

2. Не известен явный вид системы уравнений (2.22), полученной в результате применения численных процедур, и потому для вычисления ее решения необходимо использовать методы численного дифференцирования.

3. Даже в простейших ситуациях оптимальное управление и, следовательно, решение краевой задачи (2.20), (2.21) может быть не единственным.

Указанные трудности привели к появлению многих сотен публикаций, посвященных разработке приближенных методов вычисления оптимальных процессов. Критический обзор и анализ основных численных методов содержится, например, в монографии [27].

Роль вычислительных алгоритмов, позволяющих получить численное решение задач оптимального управления, в настоящее время постоянно растет в связи с расширением технических возможностей, обусловленных в первую очередь развитием вычислительной техники, поскольку на практике удается реализовать сложные алгоритмы управления нелинейными системами, имеющими достаточно большую размерность. Численные методы решения современных прикладных задач управления оказываются эффективными и рациональными, если при их разработке проводится аналитическое исследование математической модели и используются аналитические приближенные или асимптотические методы вычислений. Такая возможность появляется, когда математическая модель управляемого процесса описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от некоторых параметров. Наличие параметров позволяет провести предварительное исследование уравнений движения, выделить малые члены и разработать методы приближенного решения задач оптимального управления, обеспечивающие необходимую точность. Для вычисления приближенных решений в таких ситуациях используются методы возмущений Ляпунова — Пуанкаре, идеи теории нелинейных колебаний и асимптотические методы нелинейной механики. Теория аналитических приближенных методов такого типа развита, например, в монографиях [1, 21, 26].

2.4. Примеры

Пример 2.1

Рассмотрим материальную точку с переменной массой, которая движется по идеально гладкой горизонтальной прямой под действием реактивной управляющей силы. Уравнения движения точки выведены в примере 1.2. Предположим, что сила притяжения на точку не действует и что нас интересует только проблема управления скоростью точки, а требований к ее положению на прямой не имеется. В таком случае в уравнениях модели (1.10) первое равенство можно отбросить и рассматривать только второе уравнение при $\alpha = 0$, определяющее динамику изменения скорости. Обозначив $x_2 = x$, рассмотрим задачу 1.1 об оптимальном управлении для одномерной системы

$$\dot{x} = u, \quad x(t_o) = x_o, \quad | u | \leqslant 1,$$

когда качество управления оценивается функционалом

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_{t_o}^{1} u^2(t)\, dt + \frac{1}{2}\, x^2(1).$$

Сначала найдем оптимальное решение при отсутствии ограничения на управление. Функция Понтрягина

$$H = \psi\, u - \frac{1}{2}\, u^2$$

имеет максимум при $u^o = \psi$ и краевая задача (2.20), (2.21) имеет вид:

$$\dot{x} = \psi, \quad \dot{\psi} = 0;$$
$$x(t_o) = x_o, \quad \psi(1) = -x(1).$$

Поэтому имеем

$$x^o(t) = x_o + (t - t_o)\psi^o, \quad \psi^o = -x^o(1).$$

Отсюда находим

$$x^o(1) = x_o - (t - t_o)x^o(1), \quad x^o(1) = \frac{x_o}{2 - t_o}.$$

Следовательно, рассматриваемая задача управления при отсутствии ограничения на управление имеет единственный экстремальный процесс

$$x^o(t) = x_o\, \frac{2 - t}{2 - t_o}, \quad u^o = \psi^o = -\frac{x_o}{2 - t_o}. \tag{2.23}$$

Значение минимизируемого функционала качества на экстремальном процессе определяется равенством

$$I[u^o] = \frac{1}{2}\, \frac{x_o^2}{(2 - t_o)^2}(1 - t_o) + \frac{1}{2}\, \frac{x_o^2}{(2 - t_o)^2} = \frac{x_o^2}{2(2 - t_o)}. \tag{2.24}$$

Учтем теперь наличие ограничения на управление. Запишем функцию Понтрягина в виде

$$H = \frac{1}{2}\, \psi^2 - \frac{1}{2}\, (u - \psi)^2.$$

Легко видеть, что ее максимум достигается на управлении

$$u^o = \begin{cases} \psi & , \ \mid \psi \mid \leqslant 1, \\ sgn\, \psi & , \ \mid \psi \mid \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.25}$$

Поэтому при начальном условии, удовлетворяющем неравенству

$$| x_o | \leqslant 2 - t_o,$$

процесс (2.23) по-прежнему является экстремальным. Поскольку в данном примере величина ψ постоянна, то в силу (2.25) приходим к выводу

$$u^o = \begin{cases} -\frac{x_o}{2-t_o} & , \ | x_o | \leqslant 2 - t_o, \\ +1 & , \ x_o \leqslant -(2 - t_o), \\ -1 & , \ x_o \geqslant 2 - t_o. \end{cases} \tag{2.26}$$

Отсюда получаем

$$x^o(t) = \begin{cases} x_o \frac{2-t}{2-t_o} & , \ | x_o | \leqslant 2 - t_o, \\ x_o + (t - t_o) & , \ x_o \leqslant -(2 - t_o), \\ x_o - (t - t_o) & , \ x_o \geqslant 2 - t_o. \end{cases} \tag{2.27}$$

Таким образом, если на управление наложено ограничение $| u | \leqslant 1$, то при любом начальном условии $\{0 \leqslant t_o < 1, x_o\}$ необходимым условиям экстремума удовлетворяет единственный экстремальный процесс (2.26), (2.27). Оптимальность этого процесса будет доказана в следующей главе.

Пример 2.2

Рассмотрим задачу об управлении движением точки переменной массы из примера 1.2. Положим для простоты, что $\alpha = 0$, тогда уравнения движения (1.10) примут вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \tag{2.28}$$

Предположим, что задано начальное положение точки

$$x(0) = \{x_1(0) = 1, \, x_2(0) = 0\}.$$

Пусть качество процесса управления оценивается функционалом

$$I[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt + \frac{1}{2} \left(x_1^2(1) + x_2^2(1)\right). \tag{2.29}$$

Функция Понтрягина

$$H = \psi_1 \, x_2 + \psi_2 \, u - \frac{1}{2} u^2$$

имеет максимум при $u^o = \psi_2$ и краевая задача (2.20), (2.21) имеет вид:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1; \\ x_1(0) = 1, \, x_2(0) = 0; \\ \psi_1(1) = -x_1(1), \, \psi_2(1) = -x_2(1). \end{gathered} \tag{2.30}$$

Общее решение канонической системы (2.30) имеет вид:

$$\begin{gathered} x_1(t) = -\frac{1}{6} c_1 \, t^3 + \frac{1}{2} c_2 \, t^2 + c_3 \, t + c_4, \\ x_2(t) = -\frac{1}{2} c_1 t^2 + c_2 \, t + c_3, \\ \psi_1(t) = c_1, \, \psi_2(t) = -c_1 \, t + c_2. \end{gathered} \tag{2.31}$$

Из граничных условий найдем связь между произвольными постоянными:

$$c_4 = 1, \, c_3 = 0, \, c_1 = \frac{1}{6} c_1 - \frac{1}{2} c_2 - c_3 - c_4, \, -c_1 + c_2 = \frac{1}{2} c_1 - c_2 - c_3.$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$c_1 = -24/29, \, c_2 = -18/29, \, c_3 = 0, \, c_4 = 1.$$

Следовательно, необходимым условиям принципа максимума удовлетворяет единственный экстремальный процесс

$$x_1^o(t) = \frac{4}{29} t^3 - \frac{9}{29} t^2 + 1, \quad x_2^o(t) = \frac{12}{29} t^2 - \frac{18}{29} t,$$

$$u^o(t) = \frac{24}{29} t - \frac{18}{29}.$$

Пример 2.3

Рассмотрим задачу о мягком переводе в начало координат точки переменной массы, движение которой описывается уравнениями (2.28), при условии минимума энергии

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt.$$

Вычисление экстремального управления надлежит проводить по тому же плану, что и в предыдущем примере 2.2. Отличия начнутся с вычисления решения краевой задачи (2.20), (2.21) принципа максимума. Сама каноническая система в (2.30) не изменится, но краевые условия в данном примере запишутся в виде

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,$$
$$x_1(1) = 0,\ x_2(1) = 0,$$

что приведет к следующей зависимости между произвольными постоянными

$$c_4 = 1,\ c_3 = 0,\ -\frac{1}{6}\,c_1 + \frac{1}{2}\,c_2 + c_4 = 0,\ -\frac{1}{2}\,c_1 + c_2 = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$c_1 = -12,\ c_2 = -6,\ c_3 = 0,\ c_4 = 1.$$

Следовательно, условиям принципа максимума удовлетворяет единственный экстремальный процесс:

$$x_1^o(t) = 2\,t^3 - 3\,t^2 + 1,\ x_2^o(t) = 6\,t^2 - 6\,t,$$
$$u^o(t) = 12\,t - 6.$$

Можно проверить, что этот процесс является оптимальным решением задачи [14, с. 128 – 137].