Таблица 2.3.5

Погрешность ε_{D_x} решения обратной задачи, %

Номера линий по Y	Номера линий по X										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	4.67	3.11	–0.07	–0.94	5.42	–0.20	4.47	4.22	1.15	-
3	-	0.31	–2.88	5.40	–2.03	3.01	2.37	–2.24	1.39	2.09	-
4	-	–1.31	4.70	–0.85	–4.18	4.28	–2.93	1.29	–4.04	3.80	-
5	-	0.99	5.52	1.07	–1.97	–3.11	2.19	1.14	4.33	3.26	-
6	-	1.35	–3.11	–2.95	3.32	2.04	–1.00	–1.89	4.47	–3.27	-
7	-	0.23	–0.24	–0.04	–0.97	3.51	0.98	0.06	0.91	–4.04	-
8	-	4.20	2.04	–4.11	4.45	5.51	5.56	–3.19	–0.12	–2.00	-
9	-	–4.16	5.21	–0.93	3.32	–0.67	–3.03	–2.93	2.84	1.36	-
10	-	–4.86	5.21	2.62	3.24	0.94	4.39	–3.24	0.00	5.71	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Таким образом, рассмотрена методика определения упругих характеристик изотропных и ортотропных пластин, находящихся под действием поперечной нагрузки с помощью интегрирующих матриц в двумерном случае по известным из эксперимента перемещениям или деформациям.

Применение интегрального метода позволяет уменьшить влияние погрешностей измерений, неизбежных на практике. Рассмотренный вариант решения обладает высокой точностью и устойчивостью по отношению к погрешностям эксперимента: ошибка в окончательном решении сопоставима с погрешностью задания исходных данных, что делает возможным использование предлагаемой методики для целей расчета и диагностики конструкций.

2.4. Идентификация жесткостных характеристик конструкции балочного типа

Выбор балочной расчетной модели является упрощением задачи, требующим доказательств адекватности расчетной схемы и натуры. Решение задачи идентификации динамических параметров, таких как массовые и жесткостные характеристики, показывает, что упрощенная модель с уточненными значениями коэффициентов уравнений может в ряде случаев лучше отражать реально происходящие процессы, чем более сложная модель, но с обилием приближенных коэффициентов уравнений.

С другой стороны, балочная модель расчета на прочность и колебания позволяют создать алгоритм "оперативного", быстрого счета, без которого методы автоматического управления испытаниями теряют смысл.

Известное уравнение изгибных колебаний балки имеет вид:

$$\left(EJ\,y''\right)'' + m\tilde{y} = T\left(x,t\right), \tag{2.4.1}$$

здесь EJ – изгибная жесткость балки; m – погонная масса; $T\left(x,t\right)$ – поперечная нагрузка, меняющаяся во времени; $\tilde{y}$ – перемещение оси стержня, меняющееся во времени для каждой точки и переменное по длине балки.

В случае установившегося процесса колебаний нагрузка меняется по гармоническому закону:

$$T\left(x,t\right) = q\left(x\right)\sin\omega t\,, \tag{2.4.2}$$

где $q\left(x\right)$ – амплитуды нагрузки; ω – частота приложения нагрузки.

Решение уравнения (2.4.1) ищем в виде:

$$\tilde{y} = y\left(x\right)\sin\omega t\,. \tag{2.4.3}$$

Подстановка (2.4.2) и (2.4.3) в уравнение (2.4.1) приводит его к виду:

$$\left(EJ\,y''\right)'' - \omega^2 m y = q\,. \tag{2.4.4}$$

Для конструкции с поперечным сечением произвольной формы необходимо получить численное решение уравнения (2.4.4). Для жесткого защемления реализуемые на закрепленном конце при $x = 0$ краевые условия будут:

$$y\left(0\right) = y'\left(0\right) = 0\,, \tag{2.4.5}$$

на свободном конце при $x = l$:

$$\left(EJ\,y''\right)_{x=l} = \left(EJ\,y''\right)'_{x=l} = 0\,. \tag{2.4.6}$$

Условия (2.4.6) выражают равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы.

Для решения задачи методом интегрирующих матриц предварительно уравнение (2.4.4) интегрируется дважды с учетом краевых условий (2.4.5), (2.4.6) с тем, чтобы старшей производной стала та, которая определяет внутренние усилия и напряжения. Для балки это y'', так как по ней можно найти изгибающий момент $M = EJy''$ и нормальные напряжения.

В данной краевой задаче будем интегрировать от свободного конца $x = l$, так как при этом получается наиболее простой вид уравнения:

$$EJy'' - \omega^2 \int_x^l dx \int_x^l my\,dx = M\,, \tag{2.4.7}$$

где M – известный изгибающий момент от поперечной нагрузки.

В рассматриваемом случае будем полагать, что распределенная нагрузка отсутствует, $q = 0$.

Для численного решения интегро-дифференциального уравнения (2.4.7) запишем его в выбранных сечениях:

$$EJ_i y_i'' + \omega^2 \int\limits_{x_i}^{l} dx \int\limits_{x_i}^{l} m_{x_i} dx \int\limits_{0}^{x_i} dx \int\limits_{0}^{x_i} y_i'' dx = -P\left(l - x_i\right), \ \left(i = 1, \ n\right), \qquad (2.4.8)$$

при этом мы учли, что

$$y = \int\limits_0^x dx \int\limits_0^x y'' dx .$$

Система (2.4.8) в матричной форме с использованием интегрирующих матриц примет вид:

$$[A]\{y''\} = \{M\}, \qquad (2.4.9)$$

где $\{y''\}$, $\{M\}$ – столбцы порядка n значений соответствующих величин в расчетных сечениях;

$$[A] = \lceil EJ \rfloor - \omega^2 [J_2]^2 \ \lceil m \rfloor \ [J_1]^2 ;$$

$\lceil EJ \rfloor$ – диагональная матрица значений жесткостей EJ в расчетных сечениях; $[J_1]$ – интегрирующая матрица первого рода, численный аналог интеграла от 0 до x_i; $[J_2]$ – интегрирующая матрица второго рода, численный аналог интеграла от x_i до l.

Решение уравнения (2.4.9) дает $\{y''\}$ для балки с переменными по длине параметрами.

Теперь перейдем к рассмотрению обратной задачи, то есть будем определять EJ по известным из эксперимента $\{y''\}$. Для этого уравнение (2.4.9) запишем немного по-другому:

$$\left(\lceil EJ \rfloor - \omega^2 [J_2]^2 \lceil m \rfloor [J_1]^2\right)\{y''\} = \{M\} . \qquad (2.4.10)$$

Затем проведем некоторые преобразования для того, чтобы из системы (2.4.10) выразить искомую величину EJ. Раскрывая скобки и перенося в правую часть известные величины, получим:

$$\lceil EJ \rfloor \{y''\} = \{M\} + \omega^2 [J_2]^2 \lceil m \rfloor [J_1]^2 \{y''\} .$$

Эта же зависимость в более компактной форме при обозначении правой части через $\{B\}$ примет вид:

$$\lceil EJ \rfloor \{y''\} = \{B\} . \{K\}$$

Теперь представим известную величину $\{\ y''\}$ в форме диагональной матрицы, а неизвестную EJ как обычно в виде столбца:

$$\lceil y'' \rfloor \{EJ\} = \{B\}. \qquad (2.4.11)$$

При помощи записи (2.4.11) можно проводить идентификацию EJ по известным экспериментальным данным. Так как в решении используется интегральный метод, его зависимость от погрешностей, неизбежных в ходе реального эксперимента, ниже, чем при численном дифференцировании. Приведены примеры идентификации изгибной жесткости балки постоянного сечения, переменного и ступенчатого.

<u>Пример 2.4.1.</u> Балка постоянного сечения. Характеристики: длина $l = 2.72$ м, погонная масса $m = 2.63$ кг/м, $EJ = 4.601 \cdot 10^5$ кг/м^3, возбуждающая сила $P = 100$ м приложена на свободном конце балки, частота $\omega = 1137.2$ кол/мин.

Прямым расчетом получены значения $\{y''\}$ по длине конструкции, затем в них внесена случайная несбалансированная погрешность в диапазоне $\pm 10\%$.

Таблица 2.4.1

Распределение кривизн по длине

Номер сечения	Кривизна расчетная	Кривизна экспериментальная	Внесенная погрешность, %
1	$1.16551 \cdot 10^{-5}$	$1.06061 \cdot 10^{-5}$	–9
2	$6.93342 \cdot 10^{-6}$	$6.72542 \cdot 10^{-6}$	–3
3	$2.9125 \cdot 10^{-6}$	$2.6795 \cdot 10^{-6}$	–8
4	$5.27055 \cdot 10^{-7}$	$4.90161 \cdot 10^{-7}$	–7
5	$-1.09536 \cdot 10^{-6}$	$-1.04059 \cdot 10^{-6}$	–5
6	$-2.6906 \cdot 10^{-6}$	$-2.52916 \cdot 10^{-6}$	–6
7	$-4.08863 \cdot 10^{-6}$	$-4.00685 \cdot 10^{-6}$	–2
8	$-5.2576 \cdot 10^{-6}$	$-5.41532 \cdot 10^{-6}$	3
9	$-6.17358 \cdot 10^{-6}$	$-6.35878 \cdot 10^{-6}$	3
10	$-6.8265 \cdot 10^{-6}$	$-6.75824 \cdot 10^{-6}$	–1
11	$-7.2903 \cdot 10^{-6}$	$-6.85288 \cdot 10^{-6}$	–6
12	$-7.20536 \cdot 10^{-6}$	$-7.85384 \cdot 10^{-6}$	9
13	$-6.16945 \cdot 10^{-6}$	$-5.5525 \cdot 10^{-6}$	–10
14	$-4.71612 \cdot 10^{-6}$	$-4.52748 \cdot 10^{-6}$	–4
15	$-3.33293 \cdot 10^{-6}$	$-3.16629 \cdot 10^{-6}$	–5
16	$-2.06745 \cdot 10^{-6}$	$-2.0261 \cdot 10^{-6}$	–2
17	$-1.04138 \cdot 10^{-6}$	$-9.78899 \cdot 10^{-7}$	–6
18	$-4.15303 \cdot 10^{-7}$	$-4.44375 \cdot 10^{-7}$	7
19	$-1.1446 \cdot 10^{-7}$	$-1.15605 \cdot 10^{-7}$	1

Погрешность должна моделировать результат эксперимента. После этого проведена идентификация EJ согласно описанному алгоритму. В данном примере целесообразно привести все результаты подробно (табл. 2.4.1 и табл. 2.4.2), чтобы наглядно показать, как вносятся погрешности и как это влияет на результат идентификации. В двух других примерах ограничимся графиками.

Таблица 2.4.2

Распределение изгибной жесткости по длине

Номер сечения	EJ исход	EJ идент	Погрешность идентификации, %
1	460100	505604	9.89
2	460100	474330	3.09
3	460100	500109	8.69
4	460100	494731	7.52
5	460100	484316	5.26
6	460100	489468	6.38
7	460100	469490	2.04
8	460100	446699	– 2.91
9	460100	446699	– 2.91
10	460100	464747	1.01
11	460100	489468	6.38
12	460100	422110	– 8.25
13	460100	511222	11.11
14	460100	479271	4.16
15	460100	484316	5.26
16	460100	469490	2.04
17	460100	489468	6.38
18	460100	430000	– 6.54
19	460100	455545	– 0.99

<u>Пример 2.4.2.</u> Параметры идентифицируемой балки те же, что и в примере 2.4.1. Отличие состоит в том, что балка имеет плавно меняющуюся по длине изгибную жесткость (рис. 2.4.2).

<u>Пример 2.4.3.</u> Для полноты картины проведем идентификацию EJ описанной балки при ступенчатом изменении ее жесткостных характеристик (рис. 2.4.4).