

В заключение отметим, что здесь изложены лишь основные положения МКР. К настоящему времени разработаны многочисленные его варианты, с которыми можно ознакомиться в обширной литературе, посвященной общей теории МКР и его приложениям к конкретным задачам.

## Г л а в а П. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ СУММ

### § 2.1. Интерполирование функций

Метод конечных сумм (МКС), в отличие от МКР, основан на численной (конечной) записи интегралов от искомой функции через ее дискретные значения в расчетных сечениях, заранее выбранных на интервале интегрирования.

Поскольку при этом сама функция неизвестна и в задачах строительной механики является искомой, для выполнения операции интегрирования необходимо предварительно провести ее интерполирование.

Последнее заключается в подборе какой-либо известной функции (обычно полинома), которая в расчетных сечениях имеет те же значения, что и искомая. При этом интерполирующий полином лишь приближенно заменяет (аппроксимирует) искомые функции, которые еще только будут определены в результате расчета. Следовательно, все формулы интегрирования на основе интерполирующих полиномов являются приближенными.

Существуют три типа интерполяции функций: сквозная, кусочная и скользящая.

Сквозная интерполяция заключается в замене аппроксимируемой функции  $y(x)$  одной кривой  $f(x)$  на всем интервале ее изменения (рис. 2.1, а). Эта кривая подбирается из условия, чтобы в узлах она давала значения аппроксимируемой функции  $y_i = y(x_i)$ :

$$f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В случае полинома его степень должна быть, очевидно, равна  $n - 1$ ,  $n$  коэффициентов которого и находятся из приведенного условия.

Сквозная интерполяция обеспечивает непрерывность функции, но приводит к сложным выражениям для интегралов, так как в каждой точке они выражаются через значения  $y_i$  во всех расчетных сечениях интервала.

При кусочной интерполяции аппроксимируемая функция представляется в виде набора несложных кривых  $f_k(x)$  (рис. 2.1, б). В этом случае выражения для интегралов получаются значительно проще, чем при сквозной интерполяции, так как в их выражения входят значения

$y_i$  в небольшом числе соседних точек. Однако при этом не обеспечивается непрерывность функции, так как в местах сочленения кривых производные терпят разрыв. Кроме того, очевидно, выражения для интегралов получаются разными на различных участках (нарушается однотипность и симметричность формул), поэтому такая интерполяция используется чаще всего только для записи интегралов по всему интервалу. На такой интерполяции основаны, например, известные формулы трапеций и Симпсона для вычисления определенных интегралов по всему интервалу интегрирования.

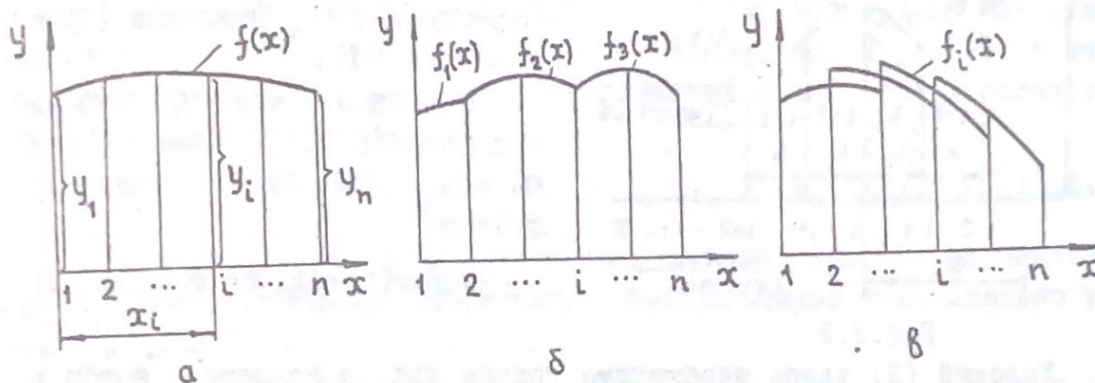


Рис.2.1

Скользящая интерполяция состоит в замене аппроксимируемой функции серией перекрывающихся друг друга несложных кривых (рис.2.1, в). Все они проходят через значения  $y_i$  в нескольких соседних расчетных сечениях<sup>\*</sup>). При этом обычно они представляют собой одну и ту же кривую (например, полином одной и той же степени), которая как бы "скользит" вдоль аппроксимируемой функции. Каждая такая кривая используется для записи интеграла в методе конечных сумм по среднему для нее участку. Поэтому, в отличие от кусочной интерполяции, во-первых, формулы получаются однотипными для всех точек интервала, а во-вторых, обеспечивается непрерывность аппроксимации. В то же время, формулы для интегралов содержат по-прежнему значения  $y_i$  лишь в нескольких соседних расчетных сечениях.

Таким образом, скользящая интерполяция лишена отмеченных недостатков двух других способов интерполяции — сквозной и кусочной, поэтому применим скользящую интерполяцию. Проведем построение некоторых интерполяционных полиномов при скользящей интерполяции. Как следует из предыдущего материала, такой полином представляет собой полиномиальную функцию от  $x$ :

<sup>\*</sup>) Для наглядности на рисунке эти кривые условно изображены не проходящими через точки  $y_i$ .

$$f(x) = \sum_0^m a_k (x - x_i)^k, \quad (2.1.1)$$

которая в ряде расчетных сечений в окрестности точки  $i$  равна значениям в них искомой функции (рис.2.2), т.е.

$$f(x_p) = y_p \quad (p = \dots, i-1, i, i+1, \dots). \quad (2.1.2)$$

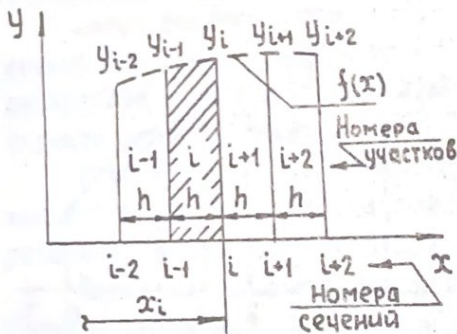


Рис.2.2

Условий (2) здесь необходимо только два, в качестве которых возьмем

$$f(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad f(x_i) = y_i, \quad (2.1.4)$$

т.е. считаем, что (3) заменяет  $y(x)$  на  $i$ -м участке<sup>\*</sup>).

Подставляя (3) в (4), находим  $a_0 = y_i$ ,  $a_1 = \frac{1}{h} (y_i - y_{i-1})$ , следовательно

$$f(x) = y_i + \frac{1}{h} (y_i - y_{i-1}) (x - x_i). \quad (2.1.5)$$

Очевидно, что скользящая интерполяция прямыми (5) приведет к аппроксимации  $y(x)$  ломаной линией, т.е. будут иметь место разрывы в производной по расчетным сечениям. Поэтому рассмотрим более сложную аппроксимацию  $y(x)$  при использовании полинома (I) с  $m=2$ :

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_i) + a_2 (x - x_i)^2. \quad (2.1.6)$$

Условий (2) здесь необходимо три и естественно их записать для сечений, расположенных симметрично относительно сечения  $i$ :

$$f(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad f(x_i) = y_i, \quad f(x_{i+1}) = y_{i+1}. \quad (2.1.7)$$

<sup>\*</sup> Здесь принято, что номер участка определяется номером расчетного сечения, ограничивающего его справа (см. рис.2.2).

Подставляя (6) в (7), найдем

$$a_0 = y_i, a_1 = \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}), a_2 = \frac{1}{2h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}),$$

тогда

$$f(x) = y_i + \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1})(x - x_i) + \frac{1}{2h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})(x - x_i)^2. (2.1.8)$$

Очевидно, что скользящая интерполяция квадратными параболлами (8) устранил разрывы производных по расчетным сечениям, но для записи интегралов по участкам она не совсем удобна, так как относительно участка  $i$  располагается несимметрично. В связи с этим рассмотрим еще более сложную аппроксимацию  $y(x)$  при использовании полинома (I) с  $m = 3$ :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_i) + a_2(x - x_i)^2 + a_3(x - x_i)^3. (2.1.9)$$

Условий (2) для него необходимо четыре и удобнее их записать для расчетных сечений, симметрично расположенных относительно участка  $i$  (рис.2.2):

$$f(x_{i-2}) = y_{i-2}, f(x_{i-1}) = y_{i-1}, f(x_i) = y_i, f(x_{i+1}) = y_{i+1}. (2.1.10)$$

Подставляя (9) в (10), найдем:

$$a_0 = y_i; a_1 = \frac{1}{6h} (2y_{i+1} + 3y_i - 6y_{i-1} + y_{i-2}); a_2 = \frac{1}{2h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1});$$

$$a_3 = \frac{1}{6h^3} (y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2}).$$

Следовательно:

$$f(x) = y_i + \frac{1}{6h} (2y_{i+1} + 3y_i - 6y_{i-1} + y_{i-2})(x - x_i) +$$

$$+ \frac{1}{2h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})(x - x_i)^2 + \frac{1}{6h^3} (y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2})(x - x_i)^3. (2.1.11)$$

Аналогично можно построить интерполирующий полином сколь угодно большой степени  $m$ , однако для практических вычислений вполне достаточную точность дает полином 3-й степени (II).

В заключение получим только еще один интерполяционный полином (I) с  $m = 4$ , симметричный относительно расчетного сечения  $i$ :

$$f(x) = y_i + \frac{1}{12h} (-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2})(x - x_i) +$$

$$+ \frac{1}{24h^2} (-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2})(x - x_i)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12h^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2})(x - x_i)^3 +$$

$$+ \frac{1}{24h^4} (y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2})(x-x_i)^4, \quad (2.1.12)$$

коэффициенты которого  $\alpha_k$  находятся из условий (2) в сечениях  $i-2, i-1, i, i+1, i+2$ .

### § 2.2. Формулы конечной записи интегралов

Рассмотрим применение полученных в предыдущем параграфе интерполяционных полиномов для численной записи определенных интегралов с переменным верхним пределом<sup>ж)</sup>

$$A(x) = \int_0^x y(x) dx, \quad (2.2.1)$$

которые на основании известной геометрической аналогии можно представить в виде бесконечной суммы

$$A(x) = \sum_1^{\infty} dA, \quad (2.2.2)$$

элементарных площадей  $dA = y(x) dx$  (рис.2.3).

Заменяя в (2) бесконечно малое приращение  $dx$  на конечное<sup>жж)</sup>  $\Delta x = h$  (рис.2.4), получим вместо (2) систему значений  $A(x)$  в дискретных точках интервала интегрирования (расчетных сечениях) в виде конечной суммы:

$$A(x_k) = \sum_2^k \Delta A_i \quad (k=2,3,\dots,n), \quad (2.2.3)$$

где конечная площадь полосы, соответствующей  $i$ -му участку рис.2.4:

$$\Delta A_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} y(x) dx \quad (i=2,3,\dots,n). \quad (2.2.4)$$

Если функция  $y(x)$  была бы известна, то (4), а следовательно, и (3) давали бы точное значение интегралов соответственно по участку  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  и по интервалу  $0 \leq x \leq x_k$ . Однако, как уже отмечалось в гл. I, в задачах строительной механики эта функция яв-

ж) Нижний предел здесь принят равным нулю, что не является существенным, так как он всегда может быть изменен заменой переменной  $x$ .

жж) Здесь, так же как и в гл. I, предполагается, что расчетные сечения выбраны с постоянным шагом  $h$ .

ляется искомой, т.е. заранее неизвестна. Поэтому для вычисления  $\Delta A_i$  применим скользящую интерполяцию функции  $y(x)$ , т.е. заменим ее на участке  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  каким-нибудь из интерполяционных полиномов, записанных в § 2.1.

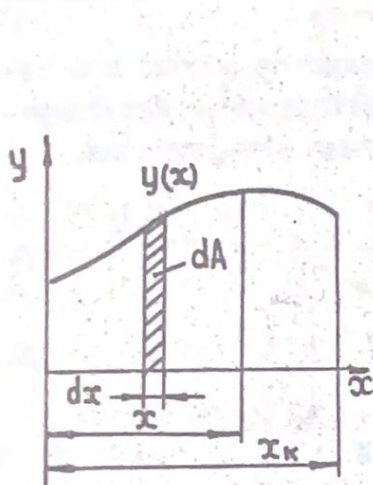


Рис.2.3

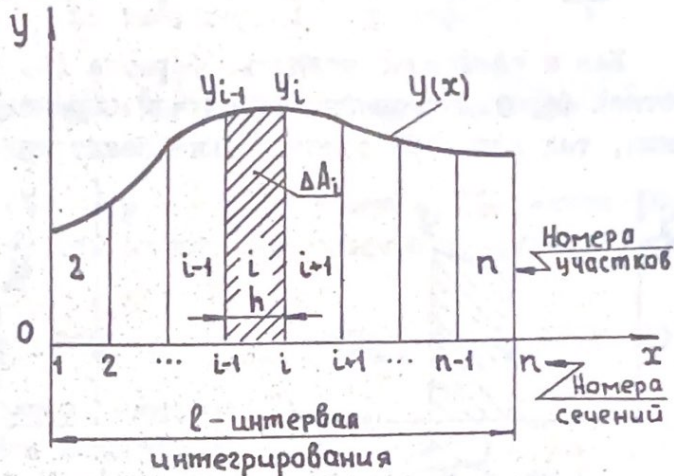


Рис.2.4

Полученные таким образом формулы вычисления интегралов носят название формул конечной их записи, так как основаны на замене бесконечно малого приращения аргумента  $dx$  в (1) на конечное  $\Delta x$  в (3). При этом они дают приближенное значение интегралов, так как интерполяционные полиномы лишь аппроксимируют (приблизительно заменяют) искомую функцию  $y(x)$  <sup>\*)</sup>. Очевидно, с повышением степени  $m$  полинома точность формул должна возрастать.

Получим конкретный вид формул конечной записи интегралов с помощью интерполяционных полиномов, полученных в § 2.1. Естественно для этого использовать из них те, которые симметричны относительно участка  $i$  ( $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ), т.е. включают одинаковое число расчетных сечений справа и слева от него. Такими являются полиномы (2.1.5) и (2.1.11) нечетных степеней  $m = 1$  (рис.2.5) и  $m = 3$  (рис.2.6). Как будет видно из последующего, такие полиномы приведут к симметричным формулам для  $\Delta A_i$ .

Использование в (4) простейшего линейного полинома (2.1.5) дает выражение для интеграла по участку <sup>\*\*) :</sup>

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} h (y_{i-1} + y_i) \quad (i = 2, 3, \dots, n), \quad (2.2.5)$$

<sup>\*)</sup> Несмотря на это, для удобства записи во всех соотношениях далее условно сохраняется знак точного равенства.

<sup>\*\*) :</sup> В соответствии с принятой нумерацией участков (рис.2.4) интервал интегрирования начинается с участка  $i = 2$ .

подставляя которое в (3), получим формулу конечной записи интеграла в виде

$$A(x_k) = \sum_2^k \Delta A_i = \frac{1}{2} h (y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{k-1} + y_k) \quad (k=2, 3, \dots, n). \quad (2.2.6)$$

Как и следовало ожидать, формула (6) является обобщением известной формулы трапеций на случай переменного предела интегрирования, так как в ее основе также лежит линейная интерполяция.

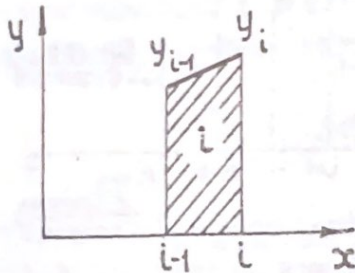


Рис.2.5

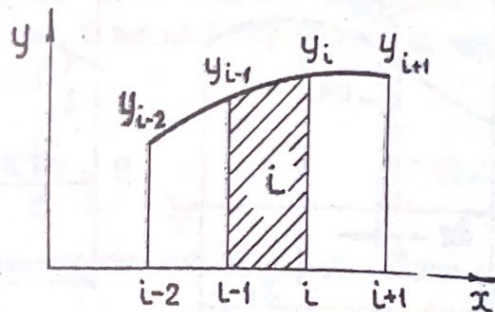


Рис.2.6

Более сложный полином (2.I.II), представляющий собой кубическую параболу, после подстановки в (4) и интегрирования дает

$$\Delta A_i = \frac{1}{24} h (-y_{i+1} + 13y_i + 13y_{i-1} - y_{i-2}) \quad (i=3, 4, \dots, n-1). \quad (2.2.7)$$

Формулу интеграла по участку (7) можно применять только для "внутренних" участков  $i=3, 4, \dots, n-1$  интервала интегрирования, так как построение кубических парабол (рис.2.6), симметричных относительно крайних участков  $i=2$  и  $i=n$ , невозможно. Поэтому для них следует использовать более простую - линейную интерполяцию (рис.2.7, а), а следовательно, формулы (5) для  $\Delta A_2$  и  $\Delta A_n$ .

С учетом этого формула конечной записи интеграла (3) при  $x_k < x_n$  запишется как \*)

$$A(x_k) = \Delta A_2 + \sum_3^k \Delta A_i \quad (k < n), \quad (2.2.8)$$

что после использования (5) для первого слагаемого и (7) для остальных даст:

$$A(x_k) = \frac{1}{24} h (11y_1 + 24y_2 + 25y_3 + 24y_4 + \dots + 24y_{k-2} + 25y_{k-1} + 12y_k - y_{k+1}) \quad (2.2.9)$$

Отметим, что для увеличения точности по крайним участкам  $i=2$  и  $i=n$  можно пойти и на несимметричную относительно их интерполя-

\*) Очевидно, что  $A(x_n) = A(x_k) + \Delta A_n$ .

цию квадратной (2.1.8) или кубической (2.1.11) параболы (рис.2.7, линии б и в).

В случае квадратной параболы подстановка в  $\Delta A_2 = \int_0^{x_2} y(x) dx$  и  $\Delta A_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} y(x) dx$  вместо  $y(x)$  полинома (2.1.8) дает<sup>ж)</sup>:

$$\Delta A_2 = \frac{1}{12} h(5y_1 + 8y_2 - y_3), \quad \Delta A_n = \frac{1}{12} h(-y_{n-2} + 8y_{n-1} + 5y_n). \quad (2.2.10)$$

Тогда, подставляя в (8) первое из соотношений (10), вместо (9) получим другой вариант конечной записи интеграла с переменным верхним пределом:

$$A(x_n) = \frac{1}{24} h(9y_1 + 28y_2 + 23y_3 + 24y_4 + \dots + 24y_{n-2} + 25y_{n-1} + 12y_n - y_{n+1}). \quad (2.2.11)$$

Аналогичным образом можно построить формулы конечной записи интегралов с использованием полиномов большей степени  $m > 3$ , однако, как указывалось в § 2.1, в этом нет необходимости, так как полином с  $m = 3$  обеспечивает достаточную для практики точность вычислений.

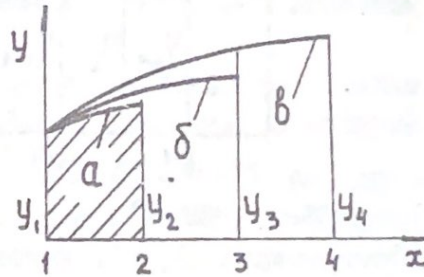


Рис.2.7

В заключение покажем, что с помощью интерполяционных полиномов можно получить формулы конечной записи производных, которые в § 1.1 были выведены другим путем<sup>жж)</sup>.

Поскольку интерполяционный полином  $f(x)$  заменяет, пусть приблизительно, искомую функцию  $y(x)$ , то, очевидно, вычисление  $y'_i$  в расчетном сечении можно заменить нахождением  $f'_i$  в этом сечении. Для этого следует использовать полиномы, симметричные относительно сечения  $i$ , т.е. с  $m = 2$  (2.1.8) или с  $m = 4$  (2.1.12) — параболы второго и четвертого порядка (рис.2.8). Тогда формулы примут симметричный вид.

Так, при использовании полинома (2.1.8) получим

$$f'(x) = \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}) + \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})(x - x_i);$$

ж) Формулы (10) в отличие от (5) и (7) несимметричны, так как в них входит разное число  $y_i$  слева и справа от участка, а крайние для участка значения  $y_i$  ( $y_1$  и  $y_2$ ,  $y_{n-1}$  и  $y_n$ ) имеют разные "веса" (весовые числа).

жж) Использование в § 1.1 путь более четко отражает существо и геометрический смысл конечно-разностных формул. С другой стороны, использование интерполяционных полиномов упрощает процесс их получения.



$$f''(x) = \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}),$$

что при  $x = x_i$  дает

$$f'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad f''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Эти выражения полностью совпадают с формулами (I.I.6) и (I.I.I2) конечной записи производных на основе центральных разностей, полученных в § I.I. Таким образом, формулы первой и второй разностных производных соответствуют скользящей интерполяции функции  $y(x)$  полиномом второго порядка.

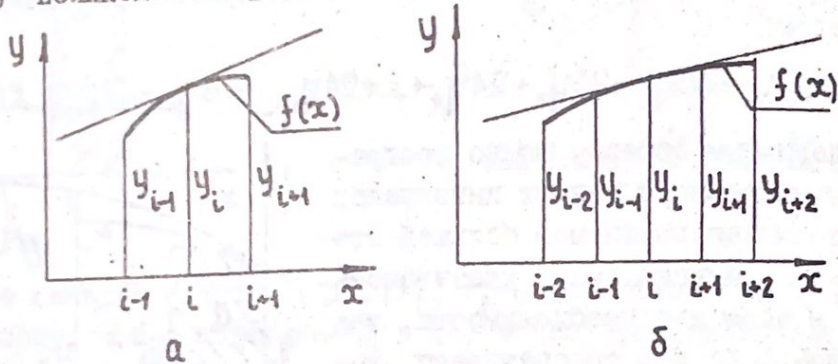


Рис. 2.8

Для записи производных  $y'''$  и последующих полином второго порядка (2.I.8) непригоден, так как для него все производные, начиная с  $f'''$  и выше, равны нулю. Для этой цели необходимо использовать полином четвертого порядка (2.I.I2). Проводя подобно предыдущему вычисление производных, для точки  $i$  получим формулы

$$f'_i = \frac{1}{12h} (-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2});$$

$$f''_i = \frac{1}{12h^2} (-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2});$$

$$f'''_i = \frac{1}{2h^3} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2});$$

$$f^{IV}_i = \frac{1}{h^4} (y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}).$$

Две последние из них совпадают с конечной записью  $y'''_i$  и  $y^{IV}_i$  (I.I.I3) и (I.I.I4), полученной в § I.I, а две первые дают новый вариант конечно-разностных формул для первой и второй производных. Поскольку они следуют из интерполяции  $y(x)$  полиномом более высокого порядка ( $m=4$ ), чем (I.I.6) и (I.I.I2) ( $m=2$ ), то являются более точными, поэтому они называются формулами уточненных

конечных разностей. Однако ввиду усложненности (они включают большее число дискретных значений  $y_i$ , чем прежде) такие формулы на практике применяются редко.

### § 2.3. Решение краевой задачи методом конечных сумм

Рассмотрим решение краевых задач строительной механики методом, основанным на применении формул конечной записи интегралов с одним переменным пределом, полученных в § 2.2. Поскольку эти формулы<sup>ж)</sup> выражают интегралы через сумму конечного числа дискретных значений функции, метод, основанный на их использовании, называется методом конечных сумм (МКС). Покажем его применение на той же краевой задаче для двухопорного растянуто-изогнутого стержня (см. рис. I.3, а), которая в § I.2 решалась методом конечных разностей (МКР).

Вначале, так же, как и в МКР, необходимо выбрать по длине стержня расчетные сечения с шагом  $h = \frac{l}{n-1}$ . При этом, в отличие от МКР, надобность в фиктивных сечениях  $i=0$  и  $i=n+1$  за пределами конструкции здесь отпадает. Далее, как и в МКР, дифференциальное уравнение (I.2.5) и краевые условия (I.2.6) записываются в расчетных сечениях:

$$EJ_i y_i'' - Sy_i = M_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (2.3.1)$$

$$y_1 = 0, \quad y_n = 0. \quad (2.3.2)$$

Уравнения (I) можно рассматривать как алгебраические относительно дискретных неизвестных  $y_i$  и  $y_i''$ . Однако их число вдвое превышает количество уравнений (I). Для приведения в соответствие числа неизвестных в (I) с числом уравнений в МКР  $y_i''$  выражались с помощью конечной записи производных через  $y_i$ . В МКС же, наоборот,  $y_i$  выражаются через  $y_i''$  на основе формул конечной записи интегралов.

Для этого воспользуемся очевидными интегральными соотношениями:

$$\int_0^x y''(\alpha) d\alpha = y'(x) - y'(0); \quad \int_0^x y'(\alpha) d\alpha = y(x) - y(0).$$

В данной краевой задаче  $y(0) = y_1 = 0$ , тогда

$$y'(x) = \int_0^x y''(\alpha) d\alpha + C; \quad y(x) = \int_0^x y'(\alpha) d\alpha, \quad (2.3.3)$$

<sup>ж)</sup> См. формулы (2.2.6), (2.2.8).

где введено обозначение  $C = y'(0) = y_1'$ , для неизвестного пока угла наклона касательной к упругой линии стержня на левой опоре  $x = 0$  (в расчетном сечении  $i = 1$ ).

Запишем теперь значения интегралов (3) в расчетных сечениях с помощью формул конечной записи (§ 2.2). Применяя, например, формулу (2.2.6), основанную на простейшей линейной интерполяции, будем иметь<sup>ж)</sup>:

$$y_k'' = y''(\alpha_k) = \frac{1}{2} h(y_1'' + 2y_2'' + \dots + 2y_{k-1}'' + y_k'') + C \quad (k=2,3,\dots,n) \quad (2.3.4)$$

$$y_i = y(\alpha_i) = \frac{1}{2} h(y_1' + 2y_2' + \dots + 2y_{i-1}' + y_i') \quad (i=2,3,\dots,n) \quad (2.3.5)$$

Используя (4), после довольно громоздких преобразований можно привести (5) к виду:

$$y_i = (2i-3)y_1'' + 4 \sum_{p=2}^{i-1} (i-p)y_p'' + y_i'' + (i-1)C \quad (i=2,3,\dots,n) \quad (2.3.6)$$

Полученное соотношение (6) выражает неизвестные значения  $y_i$  самой функции в расчетных сечениях через значения  $y_i''$  ее второй производной. Использование его позволяет в системе (I) привести в соответствие число неизвестных с числом уравнений:

$$E \sum_1 y_1'' = M_1^0; \quad (2.3.7)$$

$$\left(\frac{E \sum_i}{S} - 1\right) y_i'' - (2i-3)y_1'' - 4 \sum_{p=2}^{i-1} (i-p)y_p'' - (i-1)C = \frac{M_i^0}{S} \quad (i=2,3,\dots,n); \quad (2.3.8)$$

$$(2n-3)y_1'' + 4 \sum_{p=2}^{n-1} (n-p)y_p'' + y_n'' + (n-1)C = 0. \quad (2.3.9)$$

В общей системе разрешающих алгебраических уравнений (7)-(9) (7) и (8) суть уравнения (I), в первом из которых (для  $i=1$ ) учтено краевое условие (2)  $y_1 = 0$ , а в остальных (для  $i=2,3,\dots,n$ ) проведена подстановка  $y_i$  по (6). В связи с тем, что в (8) - (9) появилась новая неизвестная  $C = y_1'$ , возникла необходимость в дополнительном уравнении (9), которое получено из второго краевого условия (2)  $y_n = 0$  путем использования (6) для  $i=n$ .

Уравнения (7) - (9) решают поставленную краевую задачу, так как из них могут быть найдены все  $y_i''$ , а по ним путем численно-

ж) При этом в формуле (2.2.6)  $y$  заменяется на подынтегральные функции интегралов (3), т.е.  $y''$  и  $y'$  соответственно. Кроме того, для  $y$  индекс  $k$  для удобства заменен на  $i$ .

го интеграл пример да Отметим, ного дифференцирование непосредственно в к

В об практическому решению (лине, коллениа.

§

Рас записи и для кото представ но упрощ их формул (2.2 вания, г очевидн

где {ΔA ветстве

ж) выполне

го интегрирования по формулам (4), (5) -  $y_i'$  и  $y_i$ . Рассмотренный пример дает, конечно, лишь общее представление о принципах МКС. Отметим, что в сравнении с МКР здесь отсутствует операция численного дифференцирования, точно удовлетворяются краевые условия<sup>\*)</sup>, решение сводится к определению производной искомой функции, которая непосредственно определяет внутренние усилия  $M_i = EY_i y_i''$  и напряжения в конструкции.

В связи с тем, что в отличие от МКР в учебной литературе МКС практически не освещен, следующая глава посвящена подробному изложению одного из вариантов МКС, построенного на матричной символике, которая позволяет существенно алгоритмизировать все вычисления.

### Глава III. АППАРАТ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МАТРИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

#### § 3.1. Матричная форма конечной записи интегралов.

##### Интегрирующая матрица первого типа.

Рассмотренный в предыдущей главе прием конечной (численной) записи интегралов приводит к большому числу однотипных операций, для которых, как это было указано в § 1.3, значительную выгоду представляет применение матриц. Они позволяют не только существенно упростить запись формул, но и алгоритмизировать все операции по их формированию и применению для решения краевых задач.

Покажем это на соотношениях, полученных в § 2.2. Систему формул (2.2.5) интегралов  $\Delta A_i$  по всем участкам интервала интегрирования, полученных при линейной интерполяции, можно представить, очевидно, одним матричным соотношением:

$$\{\Delta A\} = [L]\{y\}, \quad (3.1.1)$$

где  $\{\Delta A\}$ ,  $\{y\}$  - столбцы порядка  $n$  значений  $\Delta A_i$  и  $y_i$  соответственно:

$$\{\Delta A\} = \begin{bmatrix} \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \\ \vdots \\ \Delta A_n \end{bmatrix}; \{y\} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

<sup>\*)</sup> В рассмотренном примере первое из них использовано в (3), выполнение второго обеспечивается уравнением (9).

$a[L]$  - квадратная матрица порядка  $n$  весовых чисел (коэффициентов) формул (2.2.5):

$$[L] = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 000 \dots 000 \\ 110 \dots 000 \\ 011 \dots 000 \\ \dots \dots \dots \\ 000 \dots 110 \\ 000 \dots 011 \end{bmatrix}$$

При записи (I) к системе (2.2.5) добавлено  $\Delta A_1 = 0$  - нулевая площадь несуществующего участка  $i=1$  (см. рис. 2.3). Это позволяет превратить матрицу  $[L]$  в квадратную, что делает ее более удобной для последующих операций.

Далее систему значений в расчетных сечениях интеграла с переменным верхним пределом

$$A(x_k) = A_k = \int_0^{x_k} y(x) dx, \quad (3.1.2)$$

который в конечном виде представляется нарастающей суммой (2.2.3) <sup>ж)</sup>

$$A_k = \sum_{i=1}^k \Delta A_i \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (3.1.3)$$

запишем сначала так:

$$\{A\} = [T] \{\Delta A\}, \text{ а затем } \{A\} = [\gamma_1] \{y\}, \quad (3.1.4)$$

где  $[T]$  - треугольная матрица единиц порядка  $n$ :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1000 \dots 00 \\ 1100 \dots 00 \\ 1110 \dots 00 \\ \dots \dots \dots \\ 1111 \dots 10 \\ 1111 \dots 11 \end{bmatrix},$$

которая обеспечивает нарастающее суммирование  $\Delta A_i$ ;

$\{A\}$  - столбец порядка  $n$  значений интеграла (2) в расчетных сечениях, начиная с  $A_1 = 0$ , а  $[\gamma_1] = [T][L]$ .

Из (4) видно, что умножение столбца значений подынтегральной функции слева на матрицу  $[\gamma_1]$  дает столбец значений интеграла от левого конца  $x=0$  интервала до данного сечения, т.е.  $[\gamma_1]$  является численным аналогом (заменителем) операции интегрирования:

<sup>ж)</sup> Здесь, так же как и в (I), в сумму включена дополнительно площадь  $\Delta A_1 = 0$  несуществующего участка  $i=1$ .

$$\int_0^x \dots dx \rightarrow [Y_1]^* \dots \quad (3.1.5)$$

поэтому  $[Y_1]$  названа интегрирующей матрицей первого типа.

Удобство матричной записи (1), (4), (5) состоит не только в ее лаконичности. Она обладает также свойством универсальности. Во-первых, эти формулы сохраняют свой вид при использовании любых других интерполирующих полиномов. Нетрудно видеть, что это приведет лишь к изменению матрицы  $[L]$  весовых чисел. Так, для скользящей интерполяции полиномом третьей степени ( $m=3$ ) (2.1.II) матрица принимает вид:

$$[L] = \frac{h}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 13 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 13 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 13 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 12 & 12 \end{bmatrix} ; \quad (3.1.6)$$

или

$$[L] = \frac{h}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 16 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 13 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 13 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 13 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 16 & 10 \end{bmatrix} , \quad (3.1.7)$$

где (6) соответствует использованию для крайних участков (т.е.  $\Delta A_2$  и  $\Delta A_n$ ) линейной интерполяции по (2.2.5), а (7) - квадратной параболой по (2.2.I0). Соответственно с этим вторая и последняя строки у приведенных матриц различны, тогда как остальные одинаковы и определяются коэффициентами формулы кубической интерполяции (2.2.7).

Аналогично можно записать  $[L]$  для любой другой, более сложной интерполяции (т.е. при использовании полиномов (2.1.I) с  $m > 3$ ).

Во-вторых, с помощью полученных формул весьма просто записываются кратные интегралы. Например, для  $P(x) = \int_0^x dx \int_0^x y(x) dx^*$  путем представления его в виде двух последовательных операций  $A(x) = \int_0^x y(x) dx$  и  $B(x) = \int_0^x A(x) dx$  с последующей их численной реализацией по (6), получим:

$$\{P\} = [Y_1][Y_1]\{y\} = [Y_1]^2\{y\}.$$

\* К такому интегралу свелась запись  $y(x)$  через  $y''(x)$  в задаче § 2.3, что при обычной, нематричной, записи потребовало довольно громоздких преобразований.

Таким образом:

$$\int_0^x dx \int_0^x \dots dx \rightarrow [J_1]^2 \times \dots, \quad (3.1.8)$$

т.е. вычисление кратных интегралов сводится к последовательному умножению слева на интегрирующую матрицу. Другими словами, интегрирующая матрица является полным численным аналогом аналитической операции интегрирования<sup>\*</sup>).

Далее будет показано, что формулы (1), (4), (5) сохраняют свой вид при других пределах интегрирования, разрывных подынтегральных функциях и переменном шаге  $h$  расчетных сечений.

В заключение получим алгоритм образования интегрирующей матрицы  $[J_1]$ , более удобный для осуществления на ЭВМ, чем формула  $[J_1] = [T][L]$ , которая требует введения в память машины матрицы  $[T]$ .

С этой целью получим (4) другим путем. Вначале представим различные формы  $\Delta A_i$ , соответствующие применению разных интерполирующих полиномов, в обобщенной записи:

$$\Delta A_i = \sum_{v=1}^n l_{iv} \psi_v \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (3.1.9)$$

где  $l_{iv}$  - весовые числа (коэффициенты) соответствующих формул - линейной (2.2.5), квадратной (2.2.10), кубической (2.2.7) или любой другой интерполяции.

Нетрудно видеть, что система (9) есть матричное соотношение (1), расписанное по строкам. Следовательно,  $l_{iv}$  - не что иное, как элементы матрицы  $[L]$ , где  $i$  - номер строки, а  $v$  - номер столбца.

С использованием (9) соотношение (3) примет вид

$$A_k = \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n l_{iv} \psi_v \quad (k=1,2,\dots,n),$$

из-за постоянства пределов внутренней суммы его можно записать и так:

$$A_k = \sum_{v=1}^n \psi_v \sum_{i=1}^k l_{iv} = \sum_{v=1}^n j_{kv}^{(1)} \psi_v \quad (k=1,2,\dots,n), \quad (3.1.10)$$

где обозначено

$$j_{kv}^{(1)} = \sum_{i=1}^k l_{iv} \quad (k,v=1,2,\dots,n). \quad (3.1.11)$$

<sup>\*</sup> Напомним, что дифференцирующие матрицы в МКР таким свойством не обладают (см. § 1.3).

Сравнивая систему (10) с матричным соотношением (4), устанавливаем, что  $j_{k\psi}^{(1)}$  суть элементы матрицы  $[Y_1]$ , где  $k$  - номер строки, а  $\psi$  - номер столбца  $[Y_1]$ .

Таким образом, (II) представляет собой алгоритм вычисления элементов интегрирующей матрицы  $[Y_1]$  непосредственно по элементам матрицы  $[L]$ , т.е. он не требует введения в память ЭВМ матрицы  $[T]$ . Очевидно, что вычисления по (II) весьма просто программируются. Таким образом, по матрице  $[L]$ , которая является разреженной и, следовательно, потребует небольшого объема памяти, ЭВМ сама сформирует  $[Y_1]$ .

### § 3.2. Интегрирующая матрица второго типа. Случай разрывных подынтегральных функций

В § 3.1 введена интегрирующая матрица первого типа  $[Y_1]$ , осуществляющая интегрирование с левого конца интервала. Эта матрица удобна для использования в задачах с начальными условиями, т.е. когда все краевые условия заданы на конце  $x=0$  интервала. Однако в задачах строительной механики краевые условия задаются преимущественно на обоих концах интервала.

В связи с этим здесь рассмотрим построение интегрирующей матрицы второго типа, осуществляющей интегрирование с правого конца интервала  $x=l$ :

$$B(x) = \int_x^l y(x) dx. \quad (3.2.1)$$

Переходя к конечной записи этого интеграла по типу формулы (3.1.3), будем иметь

$$B_k = B(x_k) = \sum_{i=k+1}^n \Delta A_i \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (3.2.2)$$

где  $\Delta A_i$  - интегралы по участкам, определяемые формулой (2.2.4)\*.

Представляя систему соотношений (2) в матричной форме, получим после использования (3.1.1):

$$\{B\} = [Y_2] \{y\}, \quad (3.2.3)$$

где обозначено

$$[Y_2] = [\hat{T}][L]. \quad (3.2.4)$$

\* Напомним, что  $\Delta A_1 = 0$ , так как участок  $i=1$  не существует (см. § 3.1 и рис. 2.3).



Здесь  $\{B\}$  - столбец порядка  $n$  значений  $B_k = B(x_k)$ ;  
 $\{y\}$  - то же, что и в (3.1.1);  
 $[\hat{T}]$  - квадратная матрица порядка  $n$ , обеспечивающая нарастающее суммирование  $\Delta A_i$  с правого конца интервала:

$$[\hat{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сравнивая  $[\hat{T}]$  с  $[T]$  (3.1.4), видим, что они взаимно дополняют друг друга до квадратной матрицы единиц, т.е. на месте нулевых элементов  $[T]$  в  $[\hat{T}]$  стоят единицы, и наоборот.

Из (3) следует, что умножение слева на матрицу  $[J_2]$  осуществляет интегрирование столбца  $\{y\}$ , т.е.  $[J_2]$  является численным аналогом интеграла от  $x$  до  $\rho$

$$\int_{\alpha}^{\rho} \dots dx \rightarrow [J_2] * \dots \quad (3.2.5)$$

Поэтому матрица  $[J_2]$  называется, как и  $[J_1]$ , интегрирующей матрицей, но второго типа.

Как и для  $[J_1]$ , можно построить алгоритм ее вычисления без использования матрицы  $[\hat{T}]$ . С этой целью используем для  $\Delta A_i$  в (2) формулу (3.1.9); будем иметь:

$$B_k = \sum_{i=k+1}^n \sum_{v=1}^n l_{iv} y_v \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Меняя здесь знаки суммирования подобно тому, как это было сделано в  $A_k$  (3.1.10), получим

$$B_k = \sum_{v=1}^n j_{kv}^{(2)} y_v \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (3.2.6)$$

где обозначено

$$j_{kv}^{(2)} = \sum_{i=k+1}^n l_{iv}. \quad (3.2.7)$$

Сравнивая систему соотношений (6) с матричной (3), видим, что  $j_{kv}^{(2)}$  (7) суть элементы матрицы  $[J_2]$ . Таким образом, последняя может быть сформирована по элементам той же матрицы весовых чисел  $[L]$ , которая необходима и для построения матрицы  $[J_1]$ .

Отмет  
 просто зап  
 помощью по  

$$P(x) = \int_{\alpha}^{\rho} dx$$

Боле  
 весьма пр  
 вала:

Расс  
 нения инт  
 динтеграл  
 образом:

Расс  
 го рода,  
 справа и  
 конечны.  
 одно или  
 ствуют, д  
 как прави

Пуст  
 $x = x_q$  те  
 случае ин  
 диться ре  
 интервале  
 функции.  
 дой части  
 функции  
 а другое  
 рыв функ

Оче  
 ния можн  
 дельным  
 (3.1.1)

Отметим, что, как и для матрицы  $[J_1]$ , аналогия (5) позволяет просто записывать кратные интегралы с правого конца интервала с помощью последовательного умножения на  $[J_2]$ , например:

$$P(x) = \int_a^b dx \int_a^b y(x) dx \rightarrow \{P\} = [J_2][J_2]\{y\} = [J_2]^2\{y\}. \quad (3.2.8)$$

Более того, используя свойства обеих интегрирующих матриц, весьма просто записать кратные интегралы с разных концов интервала:

$$P(x) = \int_0^a dx \int_a^b y(x) dx \rightarrow \{P\} = [J_1][J_2]\{y\}. \quad (3.2.9)$$

Рассмотрим теперь важный с точки зрения практического применения интегрирующих матриц вопрос их построения для разрывных подынтегральных функций. Такие случаи возникают при резком скачкообразном изменении поперечного сечения конструкции или нагрузки.

Рассмотрим только разрыв первого рода, когда значения функции справа и слева от точки разрыва конечны. Разрыв второго рода, когда одно или оба этих значения не существуют, для реальных конструкций, как правило, не имеет смысла.

Пусть функция при некотором  $x = x_q$  терпит разрыв (рис. 3.1). В этом случае интегрирование должно проводиться отдельно по каждой части интервала интегрирования, на которые он делится сечением разрыва функции. В общем случае шаг участков  $h_j$  будет различным на каждой части интервала интегрирования. Кроме того, в точке разрыва функции необходимо ввести два сечения: одно непосредственно слева, а другое — справа от нее. Только таким образом можно учесть разрыв функции ее дискретными значениями:

$$y_{q-1} = y(x_q - 0), \quad y_q = y(x_q + 0).$$

Очевидно, что в пределах каждой части интервала интегрирования можно применить ту же процедуру вычисления интегралов по отдельным участкам, как и для гладкой функции. Тогда на основании (3.1.1)

$$\{\Delta A\}_I = [L]_I \{y\}_I, \quad \{\Delta A\}_{II} = [L]_{II} \{y\}_{II}, \quad (3.2.10)$$

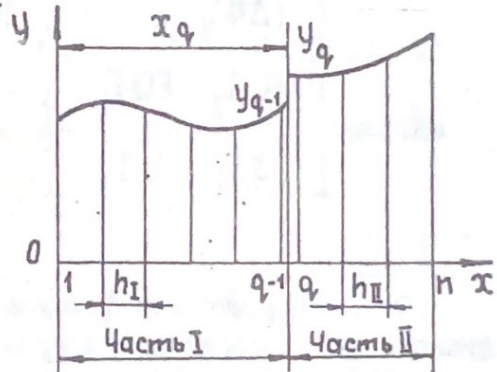


Рис. 3.1

где

$$\{\Delta A\}_I = \begin{bmatrix} \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \\ \vdots \\ \Delta A_{q-1} \end{bmatrix}; \{y\}_I = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{q-1} \end{bmatrix}; \{\Delta A\}_{II} = \begin{bmatrix} \Delta A_q \\ \Delta A_{q+1} \\ \vdots \\ \Delta A_n \end{bmatrix}; \{y\}_{II} = \begin{bmatrix} y_q \\ y_{q+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

а матрицы  $[L]_I, [L]_{II}$  в зависимости от вида интерполяции могут иметь вид (3.1.2) или (3.1.6).

Следует отметить, что порядок столбцов и матриц в (10) различен. Для первого соотношения он равен  $q-1$ , а для второго —  $[(n+1)-q]$ .

Систему (10) можно объединить в одну матричную формулу, полностью совпадающую с (3.1.1) для гладкой функции:

$$\{A\} = [L] \{y\}, \quad (3.2.II)$$

где  $\{A\} = \begin{bmatrix} \{\Delta A\}_I \\ \{\Delta A\}_{II} \end{bmatrix}, \{y\} = \begin{bmatrix} \{y\}_I \\ \{y\}_{II} \end{bmatrix}$  — полные столбцы  $\Delta A_i$  и  $y_i$ ;

$$[L] = \begin{bmatrix} [L]_I & [O]_I \\ [O]_{II} & [L]_{II} \end{bmatrix} - \text{квазидиагональная матрица с нулевыми блоками } [O]_I, [O]_{II}, \text{ которые суть прямоугольные матрицы порядка } (q-1) \times [(n+1)-q] \text{ и } [(n+1)-q] \times (q-1) \text{ соответственно.}$$

Очевидно, что эта формула сохраняет свой вид и в случае, если функция  $y(x)$  терпит на интервале интегрирования более одного разрыва. При этом изменится лишь вид матричного оператора  $[L]$ , который в общем случае  $\tau$  разрывов является квазидиагональной матрицей:

$$[L] = \begin{bmatrix} [L]_I & & & \\ & [L]_{II} & & \\ & & \dots & \\ & & & [L]_{\tau+1} \end{bmatrix}, \quad (3.2.I2)$$

где нулевые клетки для простоты не обозначены.

Составляющие матрицы  $[L]_i$  для каждой части интервала между точками разрыва и концами интервала интегрирования строятся, например, по (3.1.7). При этом по-прежнему в каждой точке разрыва функции вводятся два сечения, а шаг  $h_i$  для каждой части интервала в общем случае может быть различным.

Рассмотрим теперь случай, когда подынтегральная функция при  $x = x_q$  терпит разрыв в производных<sup>\*</sup> (рис.3.2). В этом случае точка  $\Omega$ , соответствующая сечению  $x = x_q$ , называется угловой точкой функции. Здесь, так же как и в предыдущем случае, точка разрыва  $x = x_q$  должна быть границей участков, однако нет необходимости вводить в ней два расчетных сечения, так как здесь функция имеет одно значение  $y_q = y(x_q)$ .

Очевидно, что полином (2.1.1) для скользящей интерполяции функции на участках  $Q$  и  $(Q+1)$ , примыкающих к сечению разрыва, использовать нельзя, так как он не имеет разрыва в производных. Поэтому угловую точку  $\Omega$  (рис.3.2) следует рассматривать как конец интервала интегрирования для части I и как начало для части II, т.е. рассматривать их изолированно.

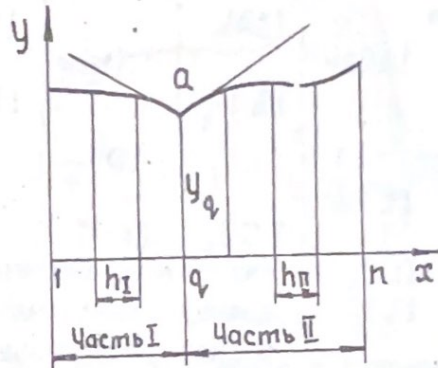


Рис.3.2

Тогда, как и в предыдущем случае, можно записать:

$$\{\Delta A\}_I = [L]_I \{y\}_I, \{\Delta A\}_{II} = [L]_{II} \{y\}_{II}. \quad (3.2.13)$$

Здесь матрицы  $[L]_j$  строятся, например, по (3.1.7), а столбцы имеют вид:

$$\{\Delta A\}_I = \begin{bmatrix} \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \\ \vdots \\ \Delta A_q \end{bmatrix}; \{y\}_I = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}; \{\Delta A\}_{II} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{A}_q \\ \Delta A_{q+1} \\ \vdots \\ \Delta A_n \end{bmatrix}; \{y\}_{II} = \begin{bmatrix} y_q \\ y_{q+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

где по-прежнему площади начальных (несуществующих) участков  $\Delta A_1$  и  $\Delta \bar{A}_q$  для частей I и II интервала равны 0.

Если теперь объединить, подобно предыдущему, соотношения (13) в одно, то суммарный столбец  $\{y\}$  будет включать два одинаковых значения  $y_q$ . Кроме того, во втором соотношении (13) первая строка представляет собой тождество  $0 \equiv 0$  (в левой части  $\Delta \bar{A}_q = 0$ , в правой также получается нуль, поскольку первая строка  $[L]_{II}$  нулевая). Поэтому проводя, как и ранее, объединение соотношений (13) в одно вида (II), удаляем строку, соответствующую  $\Delta \bar{A}_q$  и второму

<sup>\*</sup> Имеются в виду производные  $y^{(m)}$  порядка  $m$ , не превышающего степень аппроксимирующего полинома (2.1.1). Очевидно, что уловить разрыв в производных более высокого порядка функция (2.1.1) не в состоянии.

$\psi_q$ . В матрице  $[L]$  (II) для этого придется, во-первых, вычеркнуть строку, соответствующую первой (нулевой) строке  $[L]_{ii}$ , а во-вторых, сдвинуть  $[L]_{ii}$  на один столбец влево.

Тогда получим

$$\{\Delta A\} = [L]\{\psi\}, \quad (3.2.14)$$

где  $\{\Delta A\} = \begin{bmatrix} \{\Delta A\}_I \\ \{\Delta A\}_{ii}^* \end{bmatrix}$ ,  $\{\psi\} = \begin{bmatrix} \{\psi\}_I \\ \{\psi\}_{ii}^* \end{bmatrix}$  - полные столбцы  $\Delta A_i$  и  $\psi_q$  без  $\Delta A_q$  и  $\psi_q$  в столбцах  $\{\Delta A\}_{ii}^*$  и  $\{\psi\}_{ii}^*$ ;

$[L] = \begin{bmatrix} [L]_I & [O]_I \\ [O]_{ii} & [L]_{ii}^* \end{bmatrix}$  - квадратная матрица порядка  $n$ , в которой:

$[L]_I$  - квадратная матрица порядка  $q$ , как и ранее в (II);

$[L]_{ii}^*$  - прямоугольная матрица порядка  $(n-q) \times (n-q+1)$ , полученная вычеркиванием первой нулевой строки из матрицы  $[L]_{ii}$ , имевшей порядок  $(n-q+1) \times (n-q+1)$ ;

$[O]_I$   $[O]_{ii}$  - нулевые прямоугольные матрицы порядка  $q \times (n-q)$  и  $(n-q) \times (q-1)$  соответственно.

Очевидно, что наличие нескольких угловых точек на подынтегральной кривой  $\psi(x)$  приведет лишь к увеличению количества частей, на которые делится весь интервал интегрирования, и матричный оператор  $[L]$  примет вид:

$$[L] = \begin{bmatrix} [L]_I & & & & \\ & [L]_{II}^* & & & \\ & & \dots & & \\ & & & & [L]_{z+1}^* \end{bmatrix}. \quad (3.2.15)$$

где  $[L]_j$ , ( $j = I, II, \dots, z+1$ ) - матрица весовых чисел для  $j$ -й части интервала между концами его и угловыми точками;

$[L]_j^*$  - матрица  $[L]_j$  без первой нулевой строки;

$z$  - число угловых точек.

Наконец, заметим, что матрица  $[L]$  (15) может быть использована и в том случае, если функция дифференцируема на всем интервале интегрирования, но имеет различный характер поведения на разных его частях. Например, на одной части она имеет малый показатель изменчивости, а на другой - значительный (рис. 3.3). Тогда для сохранения точности интегрирования шаг на части II интервала, естественно, следует принять меньше того, который взят на части I. Производя интерполирование функций отдельно по этим частям интервала,

получим, очевидно, и для этого случая матрицу  $[L]$  в том же виде (15), что и для предыдущего случая подынтегральной функции с угловыми точками.

Таким образом, для любых функций - дифференцируемых и разрывных, матричная формула для вычисления площадей участков подынтегральной кривой, на которые она разбивается расчетными сечениями, остается единой:

$$\{\Delta A\} = [L] \{y\}. \quad (3.2.16)$$

Очевидно, что с помощью сформулированных выше правил не представляет труда построить оператор  $[L]$  и для подынтегральных функций, имеющих все эти особенности одновременно. Необходимо подчеркнуть, что составление матрицы  $[L]$  для всех случаев подынтегральной функции не требует никаких дополнительных вычислений. Матрица составляется для любого числа расчетных сечений и различных вариантов их расположения автоматически по приведенным шаблонам, что следует рассматривать как достоинство способа построения при использовании ЭВМ для проведения расчетов.

Коль скоро  $[L]$  будет построено, то далее по формулам (3.1.11) и (7) можно вычислить элементы  $\int_{\xi_k}^{(1)}$  и  $\int_{\xi_k}^{(2)}$  интегрирующих матриц первого и второго типа и сформировать  $[J_1]$  и  $[J_2]$ . В приложении приведена подпрограмма их формирования, составленная на языке Фортран при произвольном характере подынтегральной функции и любом варианте расположения расчетных сечений на интервале интегрирования.

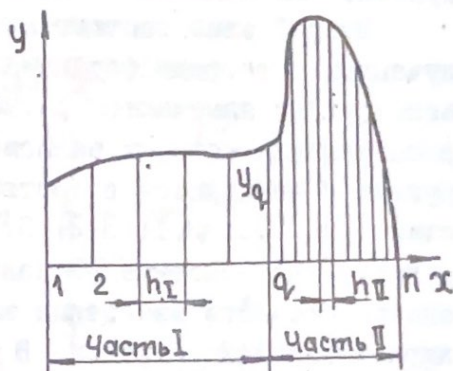


Рис. 3.3

### § 3.3. Решение краевой задачи с помощью интегрирующих матриц

Метод решения краевой задачи с помощью интегрирующих матриц состоит из двух этапов. Первый заключается в подготовке дифференциального уравнения краевой задачи к виду, удобному для использования интегрирующих матриц, и предусматривает интегрирование этого уравнения с учетом краевых условий такое количество раз, пока в нем старшей производной станет та, которая определяет напряженное состояние конструкции<sup>ж)</sup>. Такая производная называется основ-

<sup>ж)</sup> В задачах строительной механики это обычно вторые производные.

ной. Все оставшиеся в уравнениях низшие производные, в том числе и сама функция, представляются как интегралы от основной. В результате мы приходим к системе интегродифференциальных уравнений.

Второй этап состоит непосредственно в численном решении полученных интегродифференциальных уравнений. С этой целью по длине конструкции намечаются расчетные сечения, количество и характер расположения которых зависят от особенностей исследуемой конструкции и выбираются в соответствии с одной из рассмотренных ранее схем (рис.2.3; 3.1; 3.2; 3.3). Вначале намечаются те места конструкции, где основные производные могут иметь разрывы вследствие скачкообразного изменения жесткостных характеристик или нерегулярной внешней нагрузки. В этих местах вводятся два расчетных сечения: непосредственно справа и слева от точки разрыва коэффициентов дифференциальных уравнений согласно рис.3.1. Далее намечаются те места, где основные производные могут иметь угловые точки или резко изменяют свой характер. Здесь вводится по одному расчетному сечению согласно рис.3.2 и 3.3. Выбранные сечения вместе с торцами конструкции делят ее длину на части, на каждой из которых намечаются еще дополнительные сечения с равным шагом.

Затем в этих  $n$  расчетных сечениях записываются полученные на первом этапе интегродифференциальные уравнения. Эта система уравнений представляется в матричном виде, а значения всех интегралов в расчетных сечениях записываются с помощью интегрирующих матриц. В результате в явном виде выделяется столбец значений основной производной искомой функции в расчетных сечениях и задача сводится к матричному уравнению относительно этого столбца. Это уравнение решается либо как система линейных алгебраических уравнений, либо путем обращения матрицы. Таким образом находятся значения основных производных искомой функции (компонентов перемещений при решении задачи в перемещениях или компонентов напряжений при решении краевой задачи в напряжениях) в расчетных сечениях. Затем по ним можно найти остальные низшие производные путем последовательного умножения на интегрирующую матрицу.

Покажем применение метода интегрирующих матриц на примере решения дифференциального уравнения растянуто-изогнутого стержня, нагруженного произвольной распределенной поперечной  $q(x)$  и осевой  $p(x)$  нагрузками (рис.3.4)\*). В таких условиях находится, например, лопасть вертолета, для которой  $q(x)$  является аэродинамической нагрузкой, а  $p(x)$  — центробежными силами инерции, вызванными ее вращением.

\* На рисунке стержень изображен в деформированном состоянии.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси такого стержня имеет вид:

$$(EJy''')' - (Ny')' = q, \quad (3.3.1)$$

где  $EJ = EJ(x)$  — жесткость сечений на изгиб;

$N = \int_x^l n(x) dx$  — осевая сила в сечении  $x$ .

Рассмотрим два варианта закрепления, имеющих место в реальных конструкциях вертолетов — жесткое (рис. 3.4, а) и шарнирное (рис. 3.4, б).

Для первого варианта закрепления краевые условия суть:

в защемлении при  $x = 0$

$$y(0) = y'(0) = 0; \quad (3.3.2)$$

на свободном торце при  $x = l$

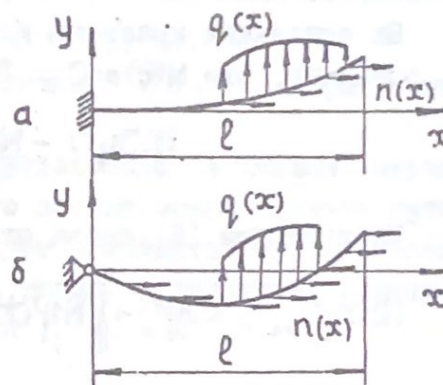


Рис. 3.4

$$(EJy'')_{x=l} = (EJy''')'_{x=l} = 0. \quad (3.3.3)$$

Условия (3) выражают равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей силы.

Для второго варианта закрепления краевые условия в сечении при  $x = 0$

$$y(0) = 0, \quad (EJy'')_{x=0} = 0, \quad (3.3.4)$$

а на свободном торце при  $x = l$  — те же, что и в (3).

Для решения задачи методом интегрирующих матриц вначале по длине стержня выбираются расчетные сечения в соответствии с изложенными рекомендациями. Тогда можно будет по приведенным в § 3.2 формулам построить интегрирующие матрицы  $[J_1]$  и  $[J_2]$ .

Далее рассматриваем первый вариант закрепления, сводящийся к краевой задаче, описываемой уравнением (1) и краевыми условиями (2), (3).

Первый этап ее решения состоит, как указано выше, из интегрирования уравнения, с тем чтобы старшей производной стала та, которая определяет внутренние усилия и напряжения. Для стержня это вторая производная  $y''$ , так как по ней можно найти изгибающий момент  $M = EJy''$  и максимальные нормальные напряжения  $\sigma = M/W$ , определяющие его прочность. Поэтому следует уравнение (1) проинтегрировать дважды. В данной краевой задаче выгоднее интегрирова-



ние вести от свободного торца  $x=l$ , так как при этом получается, как далее будет показано, наиболее простой вид уравнения.

Интегрируем (I) от  $x$  до  $l$ , получаем:

$$(EJy''')'_{x=l} - (EJy''')'_{x=x} - (Ny')_{x=l} + Ny' = \int_x^l q dx. \quad (3.3.5)$$

На основании краевого условия (3)  $(EJy''')'_{x=l} = 0$ . Кроме того, очевидно, что  $N(l) = 0$ . Тогда (5) принимает вид

$$(EJy''')' - Ny' = - \int_x^l q dx. \quad (3.3.6)$$

Интегрируем (6) снова от  $x$  до  $l$ , будем иметь

$$(EJy''')_{x=l} - EJy'' - \int_x^l Ny' dx = - \int_x^l dx \int_x^l q dx.$$

Здесь  $(EJy''')_{x=l} = 0$  на основании краевого условия (3), поэтому окончательно

$$EJy'' + \int_x^l Ny' dx = M^0, \quad (3.3.7)$$

где обозначено:  $M^0 = \int_x^l dx \int_x^l q dx$  — известный изгибающий момент от поперечной нагрузки.

На этом первый этап заканчивается, так как в (7) старшей производной является вторая. Отметим, что простой вид уравнения (7) является следствием интегрирования от свободного торца  $x=l$ . Нетрудно видеть, что интегрирование с закрепленного торца  $x=0$  привело бы к появлению постоянных интегрирования  $(EJy''')'_{x=0}$  и  $(EJy'')_{x=0}$ , которые представляют собой перерезывающую силу и изгибающий момент в заземлении, не равные нулю. Отсюда следует, что направление интегрирования (справа или слева) каждый раз должно выбираться в соответствии с заданными краевыми условиями так, чтобы наибольшее число постоянных интегрирования равнялось нулю.

Переходим ко второму этапу — численному решению полученного интегриродифференциального уравнения (7) с оставшимися неиспользованными краевыми условиями (2). Для этого (7) записывается в выбранных сечениях:

$$EJ_i y_i'' + \int_{x_i}^l Ny' dx = M_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Эта система в матричной форме с использованием интегрирующей матрицы второго типа  $[T_2]$ , которая является аналогом интеграла от  $x_1$  до  $l$  (3.2.5), примет вид:

$$[E_2]\{y''\} + [T_2]\{Ny'\} = \{M^0\}, \quad (3.3.8)$$

где  $\{y''\}$ ,  $\{Ny'\}$ ,  $\{M^0\}$  — столбцы порядка  $n$  значений соответствующих величин в расчетных сечениях  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

$[E_2]$  — диагональная матрица значений  $EJ_i$  в расчетных сечениях (см. формулу (1.3.3)).

Теперь в (8) необходимо нижшую производную (в данном случае  $y'$ ) выразить через основную  $y''$ . Это всегда можно сделать путем интегрирования. Здесь, очевидно, следует применить интегрирование от заземленного торца  $x = 0$ , так как тогда, вследствие краевого условия (2), постоянная интегрирования  $y'(0) = 0$  и

$$y' = \int_0^x y'' dx; \quad y'_i = \int_0^{x_i} y'' dx \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.3.9)$$

что с использованием интегрирующей матрицы первого типа  $[T_1]$ , которая является численным аналогом интеграла от 0 до  $x_i$  (3.1.8), примет вид:

$$\{y'\} = [T_1]\{y''\}. \quad (3.3.10)$$

Наконец, представляя столбец  $\{Ny'\}$  в (8) как произведение матриц

$$\{Ny'\} = [N]\{y'\}, \quad (3.3.11)$$

где  $[N]$  — диагональная матрица значений  $N(x_i)$  в расчетных сечениях, получим после использования (10) и подстановки в (8) окончательное матричное уравнение рассматриваемой краевой задачи

$$[A]\{y''\} = \{M^0\}, \quad (3.3.12)$$

где введено обозначение

$$[A] = [E_2] + [T_2][N][T_1]. \quad (3.3.13)$$

Решение уравнения (12) дает  $\{y''\}$ .

Для определения прогибов следует записать очевидное соотношение:

$$y = \int_0^x y' dx \quad \text{или} \quad y = \int_0^x dx \int_0^x y'' dx, \quad (3.3.14)$$

что в матричной форме принимает вид

$$\{y\} = [\gamma_1]^2 \{y''\}. \quad (3.3.15)$$

При необходимости по (10) можно найти и  $\{y'\}$ . Таким образом, поставленная краевая задача полностью решена. Отметим, что при некотором навыке промежуточные этапы получения разрешающего матричного уравнения (II) могут быть опущены и оно записано сразу с помощью (7) и (9).

Рассмотрим теперь второй вариант закрепления стержня (рис. 3.4, б). Для него в краевой задаче меняются лишь краевые условия на закрепленном торце  $x=0$ : (4) вместо (2).

Поэтому здесь первый этап — приведение исходного уравнения к интегродифференциальному виду — полностью совпадает с предыдущим, так как при этом используются только краевые условия (3) на свободном торце  $x=l$ . Различие появляется на втором этапе, поскольку здесь вместо (9), (10) будем, очевидно, иметь:

$$y' = \int_0^x y'' dx + C \quad \text{или} \quad \{y'\} = [\gamma_1] \{y''\} + C \{e\}, \quad (3.3.16)$$

где обозначено:  $C = (y')_{x=0}$  — постоянная интегрирования, равная углу наклона касательной к оси стержня в сечении  $x=0$ ;  $\{e\}$  — столбец единиц.

Подставляя (16) в (8), с использованием (II), (13) получим:

$$[A] \{y''\} + C [\gamma_2] [N] \{e\} = \{M^0\}. \quad (3.3.17)$$

В отличие от уравнения (12) первого варианта, здесь кроме столбца  $\{y''\}$  содержится еще одна неизвестная —  $C$ . Однако при выводе уравнения (17) не было использовано краевое условие (4) на закрепленном торце. Второе из них можно записать:

$$(y'')_{x=0} = y''_1 = 0, \quad (3.3.18)$$

так как  $EJ(x=0) = EJ_1$  в реальных конструкциях отлично от нуля и на него можно сократить.

Выразим  $y''_1$  из матричного уравнения (17), предварительно решив его относительно столбца  $\{y''\}$ :

$$\{y''\} = [F] \{M^0\} - C [B] \{e\}, \quad (3.3.19)$$

где обозначено

$$[F] = [A]^{-1}; [B] = [A]^{-1}[\gamma_2][N]. \quad (3.3.20)$$

Так как  $y_1''$  является первым элементом столбца  $\{y''\}$ , записав первую строку (19), можно получить:

$$y_1'' = [f_1] \{M^0\} - [b_1] \{e\}, \quad (3.3.21)$$

где  $[f_1]$ ,  $[b_1]$  - первые строки матриц  $[F]$  и  $[B]$  (20). Приравнявая (21) нулю, на основании (18) находим неизвестную  $C$ :

$$C = \frac{[f_1] \{M^0\}}{[b_1] \{e\}}, \quad (3.3.22)$$

где числитель и знаменатель суть скаляры (числа), как произведения строки на столбец.

Наконец, подстановка (22) в (19) позволяет найти столбец  $\{y''\}$ . Для нахождения самих прогибов здесь нельзя воспользоваться прежним выражением (14) ввиду различия в краевых условиях. Заменяя в первой из формул (14)  $y'$  по (16), для данного случая получим  $y = \int_0^x dx \int_0^x y'' dx + \int_0^x C dx$ , что в матричном виде дает:

$$\{y\} = [\gamma_1]^2 \{y''\} + C [\gamma_1] \{e\}. \quad (3.3.23)$$

При необходимости можно найти и  $y'$  по (16). Таким образом, и второй вариант краевой задачи полностью решен.

В следующей главе интегрирующие матрицы применяются к более сложной задаче - осесимметричной деформации оболочек.

В заключение кратко остановимся на качественной сравнительной характеристике метода конечных разностей (МКР) и метода конечных сумм (МКС) в варианте интегрирующих матриц. Оба этих метода являются приближенными для решения дифференциальных уравнений (краевых задач), но основаны они на численном осуществлении противоположных операций - дифференцирования (в МКР) и интегрирования (в МКС).

Это различие существенным образом сказывается на их точности. При численном осуществлении операция интегрирования надежнее (точнее) операции дифференцирования. Дело в том, что численное (конечное) дифференцирование, как показано в § 1.1, приводит к вычитанию соседних (а следовательно, близких по величине) значений функции, тогда как численное (конечное) интегрирование (см. § 2.2.) - к их суммированию. Известно, что при вычитании ошибка, в общем, возрастает, а при суммировании, во всяком случае, не увеличивается.

На рис.3.5 представлена геометрическая интерпретация этого результата: изображена истинная кривая  $y(x)$ , для которой в точке  $i$  необходимо вычислить производную  $y'(x)$  и интеграл по смеж-

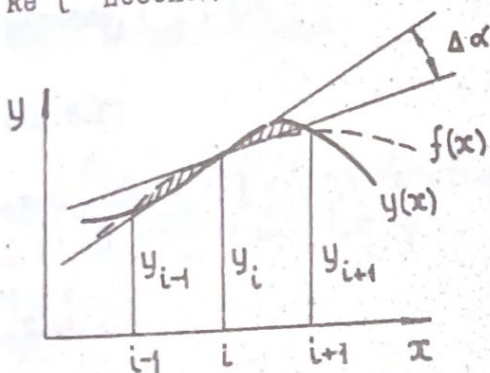


Рис.3.5

ным участкам. Так как при решении задачи истинная кривая неизвестна, то для проведения указанных операций в соответствии с рассматриваемыми численными методами вместо нее используется аппроксимирующая кривая  $f(x)$  (§ 2.1), которая совпадает с истинной только в узловых точках. Производная и интеграл от  $f(x)$ , естественно, в общем случае не совпадут со значениями этих величин для истинной кривой (на рис.3.5 ошибка в производной обозначена  $\Delta\alpha$ , а в интеграле - заштрихованными площадями). Из рис.3.5 видно, что ошибка в производной  $\Delta\alpha$  может оказаться значительно большей, чем в интеграле. Это приводит к тому, что при одинаковом числе расчетных сечений метод интегрирующих матриц дает большую точность, чем решение конечными разностями.

Очевидно, чем выше порядок производной, тем ошибка операции дифференцирования больше за счет накопления при кратном осуществлении численного дифференцирования.

Вторым источником ошибок в МКР является искусственность и приближенность в удовлетворении краевых условий, при записи которых используются конечно-разностные соотношения и фиктивные расчетные сечения за пределами конструкции (см. § 1.2). В противоположность этому в методе интегрирующих матриц краевые условия выполняются точно. Вследствие отмеченного при одинаковом числе расчетных сечений по длине конструкции метод интегрирующих матриц дает большую точность, чем МКР.

В это же время МКР обладает одним существенным достоинством, отмеченным в § 1.3 - матрица разрешающего уравнения является редкозаполненной, ленточной, для которой весьма экономно расходуется память ЭВМ. Благодаря этому облегчается возможность увеличения порядка этой матрицы, т.е. перехода к большему числу расчетных сечений (т.е. к меньшему шагу  $h$ ). Однако в этом таится опасность, так как с увеличением порядка система конечно-разностных уравнений становится все более плохо обусловленной и, начиная с некоторого, так называемого "критического", шага  $h$  (или порядка  $n$  системы), может возникнуть неустойчивость решения, в связи с чем точность будет не возрастать, а, наоборот, понижаться.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение I

#### Матрицы и операции с ними

I. Матрица<sup>ж)</sup> представляет собой таблицу чисел, имеющую  $n$  строк и  $m$  столбцов:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm-1} & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ik}].$$

Число  $a_{ik}$ , принадлежащее  $i$ -й строке и  $k$ -му столбцу матрицы, называется ее  $ik$ -м элементом.

В зависимости от  $n$  и  $m$  различают следующие типы матриц:

- а) при  $n \neq m$  - прямоугольная порядка  $n \times m$ ;
- б) при  $n = m$  - квадратная порядка  $n$ ;
- в) при  $n = 1$  - строка порядка  $m$  (обозначается  $[A]$ );
- г) при  $m = 1$  - столбец порядка  $n$  (обозначается  $\{A\}$ ).

В зависимости от значения элементов квадратная матрица может быть:

- а) симметричной, если  $a_{ik} = a_{ki}$ ;
- б) диагональной  $[A]$ , если  $a_{ik} = 0$  ( $i \neq k$ );
- в) единичной  $[E]$ , если  $a_{ik} = 0$  ( $i \neq k$ ),  $a_{ii} = 1$ .

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой и обозначается  $[0]$ ,  $\{0\}$  соответственно.

2. Операция транспонирования матрицы состоит в замене всех строк на соответствующие столбцы. Транспонированная матрица  $[A]$  порядка  $n \times m$  будет прямоугольной порядка  $m \times n$ :

---

<sup>ж)</sup> Здесь рассматриваются только числовые матрицы.

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n-11} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n-12} & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{n-1m} & a_{nm} \end{bmatrix} .$$

Очевидно, что

а) двукратное транспонирование дает исходную матрицу

$$([A]^T)^T = [A];$$

б) транспонирование симметричной матрицы ее не изменяет:

$$[A]^T = [A];$$

в) транспонирование строки дает столбец, и наоборот:

$$([A])^T = \{A\}; \quad (\{A\})^T = [A].$$

3. Операция сложения (вычитания) двух матриц состоит в сложении (вычитании) соответствующих их элементов, т.е. если

$$[A] = [a_{ik}]; [B] = [b_{ik}],$$

то  $[A] \pm [B] = [C]$ , где  $c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$ .

Очевидно, что эта операция возможна только для матриц  $[A]$ ,  $[B]$  одинакового порядка  $n \times m$ .

4. Операция умножения матрицы на скаляр (число) состоит в умножении всех ее элементов на этот скаляр, т.е.  $[B] = C[A]$ , если  $b_{ik} = Ca_{ik}$ .

5. Операция умножения двух матриц состоит в нахождении третьей матрицы, у которой элемент  $ik$  представляет собой сумму произведений элементов  $i$ -й строки левой матрицы на элементы  $k$ -го столбца правой, т.е.  $[C] = [A] \cdot [B]$ , если  $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{im}b_{mk}$ .

Очевидно, что произведение матриц существует только тогда, когда число столбцов левой матрицы равно числу строк правой, т.е. когда  $[A]$  имеет порядок  $n \times m$ , а  $[B]$  —  $m \times p$ . Тогда  $[C]$  будет иметь порядок  $n \times p$ .

Произведение матриц в отличие от произведения скаляров не перестановочно, т.е.  $[A][B] \neq [B][A]$ . Поэтому при формулировке операции умножения на какую-либо матрицу оговаривается "умно-

\*) При приведенных выше порядках матриц произведения  $[B][A]$  вообще не существует, если  $p \neq n$ .

жение на нее слева" или "умножение на нее справа". От этого может существенно зависеть результат. Так для строки  $[A]$  и столбца  $\{B\}$ , имеющих одинаковый порядок  $n$ :

$$[A]\{B\} = c \quad - \text{ скаляр } c = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n;$$

$$\{B\}[A] = [C] \quad - \text{ квадратная матрица порядка } n \text{ с элементами } c_{ik} = b_i a_k.$$

6. Операция обращения матрицы состоит в нахождении такой матрицы, умножение которой справа или слева на исходную дает единичную матрицу, т.е.

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [E],$$

где  $[A]^{-1}$  называется обращенной матрицей для  $[A]$ .

Очевидно, что операция обращения возможна только для квадратных матриц. Более того, определитель такой матрицы не должен равняться нулю (матрица неособенная).

В линейной алгебре существует несколько методов обращения матриц. Они запрограммированы для ЭВМ и содержатся в их операционных системах как стандартные подпрограммы.

В матричном исчислении операция обращения является эквивалентом операции деления для скаляров. Например, если уравнение  $[A]\{X\} = \{M\}$  умножить слева на  $[A]^{-1}$ , то получим:

$$\{X\} = [A]^{-1}\{M\}.$$

## Приложение 2

### Подпрограмма формирования интегрирующих матриц

В § 3.1, 3.2 настоящего пособия подробно описывается процедура построения интегрирующих матриц. В данном разделе приложения приведен алгоритм построения интегрирующих матриц для произвольного характера расположения расчетных сечений по длине интервала интегрирования. Алгоритм реализован в виде подпрограммы (SUBROUTINE) FIM на алгоритмическом языке Фортран и может безо всяких доработок применяться на ЭВМ любого типа.

По предлагаемому алгоритму формируются интегрирующие матрицы  $[T_1]$  и  $[T_2]$ , которые представлены соответственно массивами  $S_1$  ( $nS, nS$ ) и  $S_2$  ( $nS, nS$ ), где  $nS$  - количество сечений на интервале интегрирования (в программе  $nS \leq 30$ ). Интервал интегрирования может иметь разрывы первого рода как в самой функции (рис.3.1), так и в ее производных (рис.3.2), а также точки смены шага интегрирования (рис.3.3). Все эти точки называются особыми.



Согласно разработанной в § 3.2 методике интервал  $[0, 1]$  разбивается на ряд подынтервалов  $(\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ , где  $\alpha_j$  - координаты особых точек ( $j = 2, 3, \dots, N2 + 1$ );  $N2$  - количество подынтервалов. Подпрограмма (SUBROUTINE) FIM формирует матричный оператор  $[L]$ , а на его основе матрицы  $[Y_1]$  и  $[Y_2]$ , используя для крайних участков подынтервалов интерполяцию квадратной параболы (2.2.10), а для центральных участков - полином третьего порядка (2.2.7).

Входные параметры подпрограммы (SUBROUTINE) FIM:

- $N1 (\leq 5)$  - количество интервалов, на которые интервал  $[0, 1]$  делится разрывами функции (сдвоенными сечениями);
- $N2 (\leq 5)$  - количество подынтервалов, на которых шаг интегрирования постоянен;
- INF2(N1) - массив целых чисел, каждое число которого равно числу сечений на участке интервала от одной точки разрыва  $\alpha_{j-1}$  до другой  $\alpha_j$  (рис. 3.1);
- INF3(N2) - массив целых чисел, каждый элемент которого соответствует числу шагов на подынтервале  $j$  ( $j = 2, 3, \dots, N2 + 1$ );
- Z(N2 + 1) - массив значений  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N2 + 1$ ) координат особых точек в порядке их расположения, включая начальную ( $\alpha_1 = 0$ ) и конечную ( $\alpha_{N2+1} = 1$ ) точки.

Связь между основной программой и подпрограммой (SUBROUTINE) FIM осуществляется с помощью общих областей:

```
COMMON/FORMIN/N1, N2, INF2(5), INF3(5), Z(6);
COMMON/IM/ $1(30, 30), $2(30, 30).
```

Ввод исходной информации для формирования интегрирующих матриц ( $N1, N2, INF2, INF3, Z$ ) осуществляется в основной (MAIN) программе перед обращением к подпрограмме (SUBROUTINE) FIM.

Вызов подпрограммы FIM производится в основной программе с помощью оператора

```
CALL FIM (ks).
```

Подпрограмма FIM транслировалась на ЭВМ типа ЕС-1033 и опробована при различных значениях входных параметров  $N1, N2, INF2, INF3$  и  $Z$ .

В качестве тестовой задачи приводится пример формирования интегрирующих матриц  $[Y_1]$  и  $[Y_2]$  для интегрирования функции, имеющей разрыв при  $Z = 144$  и излом при  $Z = 288$  ( $P = 360$ ).

Знач  
будут сле  
N1=  
INF  
Z(  
V!  
матриц

[Y]:

Значения входных параметров подпрограммы (SUBROUTINE) FIM будут следующими:

$N1=2$  ,  $N2=3$ ;

$INF2(2)=4; 7$ ;  $INF3(3)=3; 3; 3$ ;

$Z(4)=0; 144; 280; 360$ .

В результате подпрограмма (SUBROUTINE) FIM вычисляет такие

матрицы:

$$\begin{aligned}
 [\gamma_1] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 32 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 58 & 22 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 20 & 32 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 18 & 58 & 22 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 18 & 54 & 54 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 18 & 54 & 54 & 28 & 16 & -2 & 0 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 18 & 54 & 54 & 27 & 29 & 11 & -1 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 18 & 54 & 54 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 18 & 54 & 54 & 18 & 18 & 54 & 54 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ -2 & 22 & 58 & 18 & 18 & 54 & 54 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & -4 & 32 & 20 & 18 & 54 & 54 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 54 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 54 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 22 & 58 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 32 & 29 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 11 & 29 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \\
[\gamma_2] = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 54 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 22 & 58 & 27 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 32 & 29 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 27 & 27 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 11 & 29 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ниже приведен текст подпрограммы FIM на алгоритмическом языке Фортран:

```

1  SUBROUTINE FIM (KS)
2  DIMENSION G1(3),G2(4)
3  COMMON/FORMIM/N1,N2,INF2(5),INF3(5),Z(6)
4  COMMON/IM/S1(30,30),S2(30,30)
5  DATA G1,G2/10.,16.,-2.,-1.,13.,13.,-1./
6  DO 302 J=1,KS
7  DO 302 M=1,KS
8 302 S1(J,M)=0.
9  N=0

```

```

10      KC3 = 0
11      K3 = 1
12      DO 307 J=1, N2
13      KC = I NF 2(K3)
14      KC1 = I NF 3(J)
15      H = (Z(J+1) - Z(J)) / (24 * KC1)
16      DO 304 L=1, 3
17      S1(N+2, N+L) = G1(L) * H
18 304  S1(N+KC1+1, N+KC1-L+2) = G1(L) * H
19      DO 305 M=3, KC1
20      DO 305 L=1, 4
21 305  S1(N+M, L+N+M-3) = G2(L) * H
22      N = N + KC1
23      IF(KC - KC1 - KC3 - 1) 303, 306, 303
24 306  N = N + 1
25      K3 = K3 + 1
26      KC3 = 0
27      GO TO 307
28 303  KC3 = KC3 + KC1
29 307  CONTINUE
30      DO 309 I=1, KS
31      CK = S1(KS, I)
32      S2(KS, I) = 0
33      DO 309 L=2, KS
34      J = KS + 2 - L
35      CC = CK + S2(J, I)
36      CK = S1(J-1, I)
37 309  S2(J-1, I) = CC
38      DO 308 I=1, KS
39      S1(I, I) = 0.
40      KC1 = KS - 1
41      DO 308 J=1, KC1
42 308  S1(J+1, I) = S1(J, I) + S1(J+1, I)
43      RETURN
44      END

```