УДК 519.865.7

Е. П. Белоусова,
М. А. Труханова

МОДЕЛЬ РЕКЛАМНОЙ КАМПАНИИ С ЭФФЕКТОМ «НАДОЕДАНИЯ» И ПОСТОЯННОЙ ЦЕНОЙ ТОВАРА

В статье исследуется проблема влияния рекламной кампании на процессы производства и реализации однородного товара с фиксированной ценой продажи. Составлена и исследуется соответствующая математическая модель, которая характеризует как эффективность рекламы, так и эффект ее надоедания.

Ключевые слова: *производство, товар, реклама, эффективность, прибыль.*

UDC 519.865.7

E. P. Belousova,
M. A. Truhanova

MODEL OF AN ADVERTISING CAMPAIGN WITH THE EFFECT OF «ANNOY» AND A CONSTANT PRICE OF THE GOODS.

The article studies the problem of influence of an advertising campaign on the processes of production and realization of a homogeneous product with a fixed-price sale. Compiled and examined the corresponding mathematical model, which describes how the effectiveness of the advertisement, and the effect of it annoy.

Keywords: *production, goods, advertising, efficiency, profits.*

Введение. В условиях рыночной экономики одним из важнейших факторов успешной работы любого предприятия является умение привлечь новых клиентов. Основным инструментом решения этой задачи является проведение рекламных кампаний.

Реклама, являясь одной из форм информационной деятельности, обеспечивает связь между производством и потреблением, а также с ее помощью поддерживается «обратная связь» с рынком и потребителем. Это позволяет контролировать продвижение товаров, создавать и закреплять у покупателя устойчивую систему предпочтений к рекламируемым объектам, вносить коррективы в сбытовую деятельность. Используя возможности направленного воздействия на потребителя, реклама способствует не только формированию спроса, но и управлению им. Но для того, чтобы реклама работала, нужно разработать стратегию рекламной кампании.

Важно четко понимать, какие задачи можно поставить перед рекламной кампанией и как сделать правильный выбор. Несмотря на то, что разработка стратегии рекламной кампании дает фирме возможность успешно справляться со своими проблемами сбыта, даже позволяет успешней конкурировать с другими фирмами, ее проведение ставит очень много вопросов, таких как:

1) сроки начала рекламной кампании и, возможно, ее окончания;

2) количество средств, выделяемых на начальном этапе в период «раскрутки» товара;

3) количество средств, выделяемых на рекламу, когда товар уже приобрел популярность и эту популярность необходимо поддерживать;

4) если имеется эффект «надоедания» рекламы, то когда менять рекламные ролики и другие рекламные приемы и какие средства и в какие моменты времени выделять на смену рекламы.

Другое соображение по оценке рекламы связано с долгосрочным воздействием рекламы на объем продаж. Если рекламная кампания оказывает постоянное влияние на объем продаж, то оно проявится лишь по прошествии длительного периода времени. Например, результат шестимесячной рекламной кампании может быть ощутим лишь год спустя. Исследования показали, что для получения эффекта от рекламы скоропортящихся товаров может понадобиться до девяти месяцев. Реклама способна не только привлечь новых покупателей, которые в будущем станут постоянными клиентами, но и развить положительное отношение или ценность торговой марки, что в дальнейшем приведет к покупке. Но на ожидание этого может уйти больше времени, чем заняла шестимесячная рекламная кампания. В связи с этим возникающая сложность в определении изменений в объемах продаж, вызванных именно рекламой, усугубляется увеличением времени между расходами на рекламу и ответной реакцией [1].

Все это вызывает необходимость теоретического исследования и разработки математических моделей рекламных кампаний.

Актуальность темы исследования обусловлена необходимостью разработки рекламной кампании для продвижения товара. Правильный выбор СМИ позволяет повысить эффективность рекламы. Именно к этому и стремится каждый рекламодатель – достичь оптимального соотношения затрат на проведение рекламной кампании и ее количественных и качественных результатов.

Проблема эффективности рекламы неизбежно возникает в любом сообществе рекламодателей. При всем обилии разговоров вокруг этой темы, специалисты признают: есть только частные решения и подходы определения эффективности по различным параметрам в конкретных и ограниченных условиях.

Тем не менее, болезненность и актуальность этой темы провоцируют постоянные дискуссии, так как основное требование, предъявляемое к рекламе, – это ее эффективность.

Одна из моделей рекламной кампании рассматривается в [2]. В статье «Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу» решается задача об оптимальном во времени распределении расходов на рекламу и строится стратегия рекламной программы в зависимости от условий ее эффективности. В работе [3] находится оптимальное распределение средств при проведении рекламной кампании. Задача организации рекламы рассматривается и в [4]. Но ни в одной из указанных работ не учитывается эффект «надоедания» рекламы с течением времени.

Цель предлагаемой работы - разработка математической модели влияния рекламы на деятельность фирмы, производящей некоторый однородный товар, решение задачи об оптимальном распределении во времени средств, выделяемой фирмой на рекламу. Критерием оптимальности является прибыль фирмы в единицу времени или прибыль на фиксированном интервале времени.

Практическое значение работы состоит в том, что после проведения соответствующих исследований, полученные в работе рекомендации, могут быть использованы при планировании рекламных кампаний.

Постановка задачи. Фирма производит однородный товар. Рассмотрим математическую модель влияния рекламы на фирму с учетом того эффекта, что при повторении рекламы она начинает «надоедать» и требуется смена рекламного ролика для возобновления ее действия на покупателей.

Введем следующие обозначения:

q – количество товара, производимого в единицу времени;

c – затраты на производство единицы товара;

p – розничная цена продажи единицы товара;

D – затраты на непроизводственные расходы (переподготовка кадров, повышение квалификации, штрафы, неустойки, затраты по исправлению брака в производстве и т.д.).

Количество выпускаемого товара и цена продажи фиксированы.

Будем также считать, что производство рентабельно.

Рентабельность – относительный показатель экономической эффективности. Он показывает, сколько рублей прибыли предприятие имеет с каждого рубля, затраченного на производство и реализацию продукции [5].

Будем считать, что на рынке установилось равновесие, так что весь товар, производимый фирмой, продается, но большего количества товара рынок не потребляет.

Прибыль фирмы в единицу времени равна

$$(p-c)q-D.$$

В силу сделанных предположений получаем, что $(p-c)q-D>0$.

Обозначим через

$R(t)$ – эффективность рекламы;

$\alpha(t)$ – количество денег, выделенных в единицу времени на рекламу;

$k(t)$ – коэффициент, отражающий эффект «надоедания» рекламы (увеличение $k(t)$ приводит к увеличению скорости забывания рекламы);

$$k_0 = const.$$

Зависимость влияния рекламы от времени описывает следующая модель

$$\frac{dR(t)}{dt}+k(t)R(t)=k_0\alpha(t). \quad (1.1)$$

На величину R оказывают влияние два фактора. Во-первых, она зависит от количества средств, вкладываемых в рекламную кампанию, и чем больше их вкладывается, тем больше влияние рекламы. Во-вторых, имеет место эффект «забывания» рекламы, когда с прекращением рекламной кампании ее влияние постепенно уменьшается.

Обозначим через $\Pi(t)$ прибыль фирмы в единицу времени. Тогда рассматриваемая ситуация описывается следующей системой дифференциальных уравнений [6]

$$\begin{cases} \frac{d\Pi(t)}{dt}=(p-c)q\big(R(t)\big)-\alpha(t)-D, \\ \frac{dR(t)}{dt}=k_0\alpha(t)-k(t)R(t); \end{cases} \quad (1.2)$$

$$R(0)=0,\ \Pi(0)=0. \quad (1.3)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (1.2) и проинтегрируем обе его части

$$\int_0^T \frac{d\Pi(t)}{dt} = \int_0^T \left(\begin{matrix}(p-c)q\big(R(t)\big)- \\ -\alpha(t)-D\end{matrix}\right)dt;$$

$$\Pi(T)-\Pi(0)=$$

$$=\int_0^T \left(\begin{matrix}(p-c)q\big(R(t)\big)- \\ -\alpha(t)\end{matrix}\right)dt-DT.$$

В силу второго равенства условия (1.3) получаем

$$\Pi(T)=\int_0^T \left(\begin{matrix}(p-c)q\big(R(t)\big)- \\ -\alpha(t)\end{matrix}\right)dt-DT. \quad (1.4)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (1.2) и выразим из него $\alpha(t)$

$$\alpha(t)=\frac{1}{k_0}\frac{dR(t)}{dt}+\frac{k(t)}{k_0}R(t). \quad (1.5)$$

Подставив равенство (1.5) в равенство (1.4), получим

$$\Pi(T)=\int_0^T \left(\begin{matrix}(p-c)q\big(R(t)\big)- \\ -\frac{1}{k_0}\frac{dR(t)}{dt}-\frac{k(t)}{k_0}R(t)\end{matrix}\right)dt-DT. \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь решение задачи

$$\Pi(T)\Rightarrow \max_{R(t)}.$$

Заметим, что слагаемое $(-DT)$ в равенстве (1.6) не зависит от вида функции $R(t)$, поэтому при решении задачи оптимизации его можно не учитывать.

Выпишем уравнение Эйлера [7]

$$f_0\left(t,R(t),R'(t)\right)=(p-c)q\big(R(t)\big)-$$

$$-\frac{1}{k_0}R'(t)-\frac{k(t)}{k_0}R(t);$$

$$\frac{\partial f_0(t,R,R')}{\partial R}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_0(t,R,R')}{\partial R'}=0;$$

$$\frac{\partial f_0(t,R,R')}{\partial R}=(p-c)q'^{(R(t))}-\frac{k(t)}{k_0};$$

$$\frac{\partial f_0(t,R,R')}{\partial R'} = -\frac{1}{k_0};$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f_0(t,R,R')}{\partial R'} = 0.$$

Учитывая полученные соотношения, уравнение Эйлера для данной задачи приобретает вид

$$(p-c)q'(R(t)) - \frac{k(t)}{k_0} = 0. \quad (1.7)$$

Обозначим через $R_0(t)$ корень этого уравнения. Он определяется соотношением

$$q'(R_0(t)) = \frac{k(t)}{k_0}\cdot\frac{1}{p-c}.$$

Будем считать, что $R_0(t)$ задает режим, при котором поддерживается некоторый постоянный уровень влияния рекламы. Однако этот режим еще надо найти.

Реклама – циклический процесс, то есть один рекламный ролик используется в течение некоторого времени, а затем, вследствие того, что он начинает надоедать человеку и человек перестает обращать на него внимание, необходимо запускать новый рекламный ролик.

Суммарный доход фирмы на протяжении всего цикла будем определять как

$$П = П_1 + П_2 - G,$$

где $П_1$ – прибыль, полученная в период раскрутки рекламы;

$П_2$ – прибыль, полученная в стационарном режиме;

G – сумма денежных средств, расходуемых на разработку нового рекламного ролика.

Рассмотрим каждый этап «жизни» рекламного ролика отдельно.

Период раскрутки рекламы. Предположим, что рекламный ролик начинает прокручиваться в момент времени $t=0$. В этом случае влияние рекламы начинается с того значения, которое осталось после предыдущего ролика, то есть с $R(0) = R_{нач}$.

Первый этап составляет интервал времени $[0,\ T_1]$. При этом на проведение рекламной кампании в единицу времени выделяется максимальное количество денежных средств α_{max}.

Рассмотрим уравнение (1.1)

$$\frac{dR(t)}{dt} + k(t)R(t) = k_0\alpha(t)$$

и условия (1.8), которые выполнены для периода раскрутки рекламы

$$\alpha(t) = \alpha_{max}; \quad R(0) = R_0(T_2). \quad (1.8)$$

Выпишем решение начальной задачи для линейного неоднородного дифференциального уравнения [8]

$$R(t) = R_0(T_2)e^{-\int_0^t k(s)\,ds} + k_0\alpha_{max}\int_0^t e^{-\int_s^t k(\tau)\,d\tau}ds. \quad (1.9)$$

Момент выхода из этого участка определяется условием

$$R(T_1) = R_0(T_1),$$

а значит, соотношением

$$R(T_1) = R_0(T_2)e^{-\int_0^{T_1} k(s)\,ds} + k_0\alpha_{max}\int_0^{T_1} e^{-\int_s^{T_1} k(\tau)\,d\tau}ds = R_0(T_1).$$

Используя формулу (1.4) и учитывая сделанные предположения, получим

$$П_1 = \int_0^{T_1}\left((p-c)q(R(t)) - \alpha_{max}\right)dt - DT_1. \quad (1.10)$$

Стационарный режим. Этот режим рассматривается на промежутке времени $[T_1, T_2]$. Уровень влияния рекламы равен $R_0(t)$. Из-за эффекта «надоедания» уровень влияния рекламы постепенно снижается, и когда он достигает значения $R(0)$, надо запускать новый ролик. Таким образом, новый цикл определяется условием $R(T_2) = R(0)$.

На данном этапе $R(t) = R_0(t)$. Тогда, используя формулу (1.5), получим выражение для определения расходов фирмы

$$\alpha(t) = \frac{1}{k_0} R_0'(t) + \frac{k(t)}{k_0} R_0(t), \qquad (1.11)$$

а доход определяется как

$$\Pi_2 = \int_{T_1}^{T_2} \begin{pmatrix} (p-c)q(R_0(t)) - \\ -\frac{1}{k_0} R_0'(t) \\ -\frac{k(t)}{k_0} R_0(t) \end{pmatrix} dt - -D(T_2 - T_1). \qquad (1.12)$$

Оптимизация цикла. Суммарный доход фирмы на протяжении всего цикла равен

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 - G = = \int_0^{T_1} \begin{pmatrix} (p-c)q(R(t)) - \\ -\alpha_{max} \end{pmatrix} dt - DT_1 + + \int_{T_1}^{T_2} \begin{pmatrix} (p-c)q(R_0(t)) - \\ -\frac{1}{k_0} R_0'(t) - \frac{k(t)}{k_0} R_0(t) \end{pmatrix} dt - -D(T_2 - T_1) - G. \qquad (1.13)$$

В качестве критерия оптимальности примем доход фирмы P в единицу времени. Тогда получим

$$P = \frac{1}{T_2} \cdot \left(\int_0^{T_1} \begin{pmatrix} (p-c)q(R(t)) - \\ -\alpha_{max} \end{pmatrix} dt + + \int_{T_1}^{T_2} \begin{pmatrix} (p-c)q(R_0(t)) - \\ -\frac{1}{k_0} R_0'(t) - \frac{k(t)}{k_0} R_0(t) \end{pmatrix} dt - -DT_2 - G \right).$$

Заметим, что T_2 входит в первое слагаемое через $R_0(T_2)$, присутствующее в $R(t)$ (формула (1.9)).

Потребуем выполнения условия $P \Rightarrow \max\limits_{T_2}$. Это приводит к решению уравнения

$$\frac{dP}{dT_2} = 0;$$

$$0 = \frac{dP}{dT_2} = \frac{d\left(\frac{\Pi}{T_2}\right)}{dT_2} = = \frac{\frac{d\Pi}{dT_2} T_2 - \frac{dT_2}{dT_2} \Pi}{T_2^2};$$

$$\frac{d\Pi}{dT_2} T_2 - \Pi = 0.$$

Найдем $\frac{d\Pi}{dT_2}$ как сумму $\frac{d\Pi_1}{dT_2}$ и $\frac{d\Pi_2}{dT_2}$. Получим

$$\frac{d\Pi_1}{dT_2} = \frac{d}{dT_2} \left[\begin{matrix} \int_0^{T_1} \left((p-c)q(R(t)) - \alpha_{max} \right) dt - \\ -DT_1 \end{matrix} \right] = = (p-c) R_0'(T_2) \int_0^{T_1} q'(R(t)) e^{-\int_0^t k(s)ds} dt \quad [9];$$

$$\frac{d\Pi_2}{dT_2} = = \int_{T_1}^{T_2} \begin{pmatrix} (p-c)q(R_0(t)) - \\ -\frac{\frac{1}{k_0} R_0'(t) -}{-\frac{k(t)}{k_0} R_0(t)} \end{pmatrix} dt - D = = (p-c)q(R_0(T_2)) - -\frac{1}{k_0} R_0'(T_2) - \frac{k(T_2)}{k_0} R_0(T_2).$$

Таким образом, уравнение для определения общей длины цикла T_2 имеет вид

$$T_2 \frac{d\Pi}{dT_2} = T_2 \cdot ((p-c) R_0'(T_2) \int_0^{T_1} q'(R(t)) e^{-\int_0^t k(s)ds} dt +$$

$$+(p-c)q\big(R_0(T_2)\big)-$$
$$-\frac{1}{k_0}R_0'(T_2)-\frac{k(T_2)}{k_0}R_0(T_2))= \qquad (1.14)$$
$$=\int_0^{T_1}\Big((p-c)q\big(R(t)\big)-\alpha_{max}\Big)dt+$$
$$+\int_{T_1}^{T_2}\begin{pmatrix}(p-c)q\big(R_0(t)\big)-\\ -\frac{1}{k_0}R_0'(t)-\frac{k(t)}{k_0}R_0(t)\end{pmatrix}dt-$$
$$-DT_2-G.$$

Решить данное уравнение можно лишь численно. Зная T_2, определяются все остальные характеристики цикла.

Пример 1. Пусть зависимость величины продаж от рекламы имеет вид

$$q(R)=aR^2+bR+\tilde{c},$$

где $a,b,c=const,$

$$a>0,\qquad b\geq 0,\qquad \tilde{c}\geq 0.$$

При $R=0$ получаем $q(0)=\tilde{c}$, то есть при отсутствии рекламы продажи товара составляют величину, равную $\tilde{n}$.

С увеличением влияния рекламы на потребителя увеличивается и количество продаваемой продукции q.

Из формулы (1.7) имеем

$$q'\big(R_0(t)\big)=\frac{k(t)}{k_0}\cdot\frac{1}{p-c};$$

$$q'(R)=2aR+b.$$

Тогда

$$2aR_0(t)+b=\frac{k(t)}{k_0}\cdot\frac{1}{p-c};$$

$$R_0(t)=\frac{k(t)}{2ak_0(p-c)}-\frac{b}{2a}.$$

Заметим, что сейчас рассматривается «стационарный» режим, то есть от начального момента $t=0$ прошло некоторое время и переходный процесс закончился.

Расходы на рекламу определяются формулой (1.5)

$$\alpha(t)=\frac{1}{k_0}\cdot\frac{dR_0(t)}{dt}+$$
$$+\frac{k(t)}{k_0}\cdot R_0(t);$$

$$\frac{dR_0(t)}{dt}=\frac{k'(t)}{2ak_0(p-c)};$$

$$\alpha(t)=\frac{1}{k_0}\cdot\frac{k'(t)}{2ak_0(p-c)}+$$
$$+\frac{k(t)}{k_0}\cdot\left(\frac{k(t)}{2ak_0(p-c)}-\frac{b}{2a}\right)=$$
$$=\frac{1}{k_0}\begin{pmatrix}\frac{k'(t)}{2ak_0(p-c)}+\\ +k(t)\cdot\left(\frac{k(t)}{2ak_0(p-c)}-\frac{b}{2a}\right)\end{pmatrix}.$$

Функция $k(t)$ отражает эффект «надоедания» рекламы. Рассмотрим случай, когда

$$k(t)=k=const.$$

Тогда

$$R_0(t)=\frac{k}{2ak_0(p-c)}-$$
$$-\frac{b}{2a}=R_0=const;$$

$$R_0(T_2)=R_0;$$

$$\frac{dR_0(t)}{dt}=\frac{k'(t)}{2ak_0(p-c)}=0;$$

$$\frac{dR_0'(t)}{dt}\Big|_{t=T_2}=0;$$

$$q\big(R_0(t)\big)=aR_0^2+bR_0+\tilde{c}=Q=const;$$

$$q\big(R_0(T_2)\big)=Q.$$

Воспользуемся формулой (1.9)

$$R(t)=R_0(T_2)e^{-\int_0^t k(s)ds}+$$

$$+k_0\alpha_{max}\int_0^t e^{-\int_s^t k(\tau)d\tau}ds.$$

В силу сделанных предположений, получаем

$$R(t) = R_0 e^{-\int_0^t kds} + +k_0\alpha_{max}\int_0^t e^{-\int_s^t kd\tau}ds = = R_0 e^{-kt} + \frac{k_0}{k}\alpha_{max} - -\frac{k_0}{k}\alpha_{max}e^{-kt} = = e^{-kt}\left(R_0 - \frac{k_0}{k}\alpha_{max}\right) + +\frac{k_0}{k}\alpha_{max}.$$

Определим общую длину цикла T_2 .Для этого подставим в формулу (1.11) полученные соотношения

$$T_2\cdot\left((p-c)Q - \frac{k}{k_0}R_0\right) = = \int_0^{T_1}\left((p-c)q(R(t)) - \alpha_{max}\right)dt + + \int_{T_1}^{T_2}\left((p-c)Q - \frac{k}{k_0}R_0\right)dt - \mathrm{D}T_2 - G;$$

$$T_2\cdot\left((p-c)Q - \frac{k}{k_0}R_0\right) = = \int_0^{T_1}(p-c)q(R(t))dt - \alpha_{max}T_1 + + \left((p-c)Q - \frac{k}{k_0}R_0\right)(T_2 - T_1) - -\mathrm{D}T_2 - G.$$

Итак, общая длина цикла T_2 определяется из соотношения

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{\mathrm{D}}\left(\int_0^{T_1}(p-c)q(R(t))dt - -\alpha_{max}T_1 - \left((p-c)Q - \frac{k}{k_0}R_0\right)T_1 - G\right).$$

Предположим, например, что кондитерская фабрика планирует продавать шоколадки по цене 43 руб/шт., себестоимость составляет 30 руб/шт. Зависимость величины продаж от рекламы имеет вид $q(R) = \frac{1}{2}R^2 + 100$. Функция $k(t) = 20$ отражает эффект «надоедания» рекламы. Пусть для привлечения покупателей фирма использует рекламу на транспорте.

Среди основных преимуществ размещения рекламы на транспорте можно выделить:

a) широкий территориальный охват;

b) возможность выбирать определенные маршруты, проходящие именно через ту часть города, которая наиболее важна для привлечения потенциальных клиентов;

c) привлечение внимания потенциальных клиентов за счет качественного, тщательно продуманного дизайнерского оформления.

Реклама на автобусах в Воронеже занимает наибольшую долю всей рекламы на транспорте города. По данным на 1 июля 2009 г., среди наиболее популярных маршрутов автобусов большой вместимости следующие: 1, 9кс, 27, 80, 79, 90 и другие. Средняя стоимость аренды под рекламу на данном транспорте в Воронеже составляет 6000 руб./мес. [10]. Это означает, что в течение 30 дней фирме необходимо выделять по 200 рублей на рекламу. Результаты вычислений приведены на рис.1.

Получаем, что общая длина цикла рекламной кампании составляет 46 дней.

Заметим, что при увеличении скорости «забывания» рекламы длина цикла уменьшается (рис.2).

Пример 2. Предположим теперь, что функция $k(t)$, отражающая эффект «надоедания» рекламы имеет вид

$$k(t) = mt + n.k(t) = mt + n.$$

Тогда

$$R_0(t) = \frac{mt+n}{2ak_0(p-c)} - \frac{b}{2a};$$

$$R_0(T_2) = \frac{mT_2+n}{2ak_0(p-c)} - \frac{b}{2a} = R_0.$$

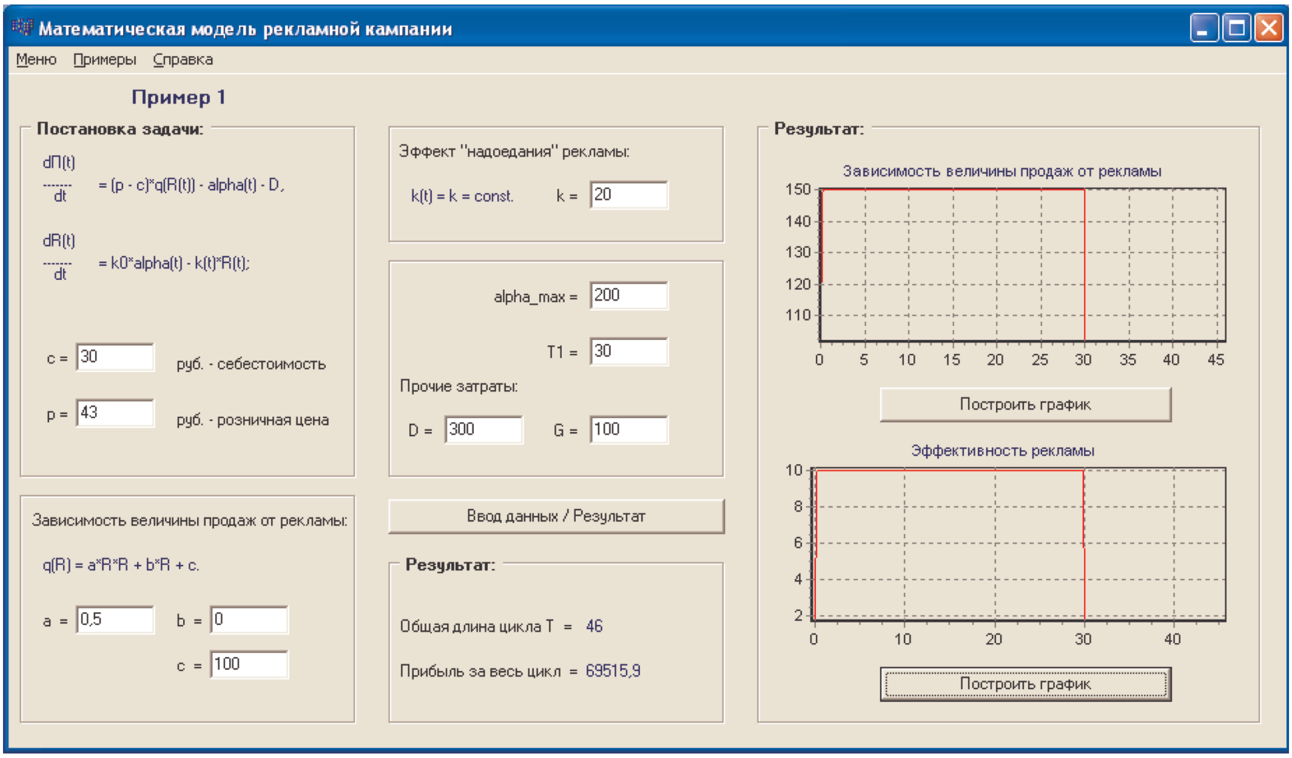

Рис. 1. Определение длины цикла рекламной кампании

Введем обозначение

$$R_0 = \frac{mT_2 + n}{2ak_0(p-c)} - \frac{b}{2a} = const.$$

Тогда получим

$$\frac{dR_0(t)}{dt} = \frac{k'(t)}{2ak_0(p-c)} = \frac{m}{2ak_0(p-c)};$$

$$q(R_0(t)) = aR_0^2(t) + bR_0(t) + \tilde{c};$$

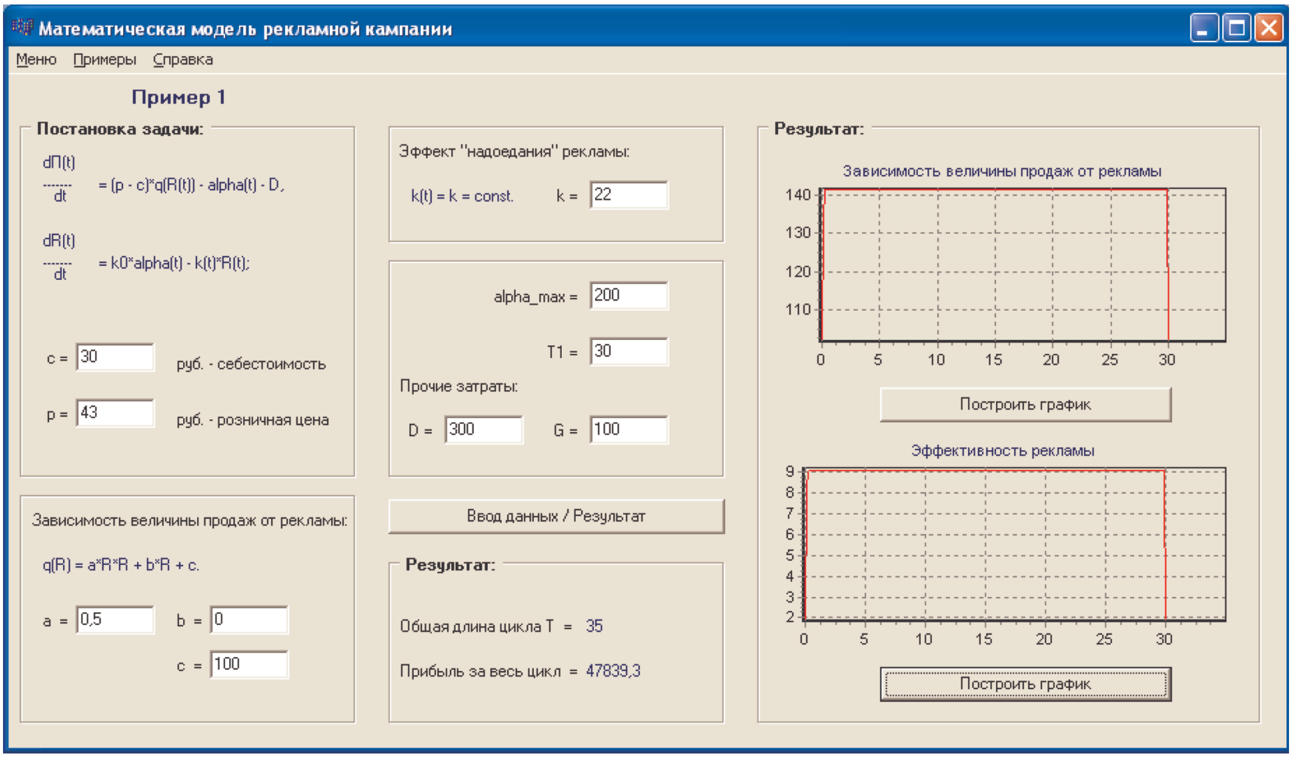

Рис. 2. Изменение длины цикла при увеличении k

$$q\left(R_0(T_2)\right) = a \cdot \left(R_0(T_2)\right)^2 + \\ +b \cdot \left(R_0(T_2)\right) + \tilde{c} = aR_0^2 + bR_0 + \tilde{c}.$$

Обозначим

$$Q = aR_0^2 + bR_0 + \tilde{c} = const.$$

Воспользуемся формулой (1.9)

$$R(t) = R_0(T_2)e^{-\int_0^t k(s)ds} + \\ +k_0\alpha_{max}\int_0^t e^{-\int_s^t k(\tau)d\tau}ds.$$

В силу сделанных предположений, получим

$$R(t) = R_0 e^{-\frac{m}{2}t^2-nt} + \\ +k_0\alpha_{max}\int_0^t e^{-\frac{m}{2}t^2-nt+\frac{m}{2}s^2+ns}ds =$$

$$= R_0 e^{-\frac{m}{2}t^2-nt} + k_0\alpha_{max}e^{-\frac{m}{2}t^2-nt}\int_0^t e^{\frac{m}{2}s^2+ns}ds =$$

$$= e^{-\frac{m}{2}t^2-nt}\left(R_0 + k_0\alpha_{max}\int_0^t e^{\frac{m}{2}s^2+ns}ds\right).$$

Определим общую длину цикла T_2. Для этого подставим в формулу (1.11) полученные соотношения

$$T_2 \cdot ((p-c)R_0'(T_2)\int_0^{T_1} q'(R(t))e^{-\int_0^t k(s)ds}dt + \\ +(p-c)q\left(R_0(T_2)\right) - \\ -\frac{1}{k_0}R_0'(T_2) - \frac{k(T_2)}{k_0}R_0(T_2)) =$$

$$= \int_0^{T_1}\left((p-c)q\left(R(t)\right) - \alpha_{max}\right)dt +$$

$$+\int_{T_1}^{T_2}\left((p-c)q\left(R_0(t)\right) - \frac{1}{k_0}R_0'(t) - \frac{k(t)}{k_0}R_0(t)\right)dt - \\ -DT_2 - G;$$

$$T_2 \cdot ((p-c)\frac{m}{2ak_0(p-c)} \\ \int_0^{T_1}\left[(2aR(t)+b)\cdot e^{-\frac{m}{2}t^2-nt}\right]dt + \\ +(p-c)Q - \frac{1}{k_0}\frac{m}{2ak_0(p-c)} - \\ -\frac{mT_2+n}{k_0}R_0) =$$

$$= \int_0^{T_1}[(p-c)(aR^2(t)+bR(t)+\tilde{c}) - \alpha_{max}]dt +$$

$$+\int_{T_1}^{T_2}\begin{pmatrix}(p-c)(aR_0^2(t)+bR_0(t)+\tilde{c}) - \\ -\frac{1}{k_0}\frac{m}{2ak_0(p-c)} - \frac{mt+n}{k_0}R_0(t)\end{pmatrix}dt \\ -DT_2 - G;$$

$$T_2 \cdot ((p-c)\frac{m}{2ak_0(p-c)} \\ \int_0^{T_1}\left[(2aR(t)+b)\cdot e^{-\frac{m}{2}t^2-nt}\right]dt + \\ +(p-c)Q - \frac{1}{k_0}\frac{m}{2ak_0(p-c)} - \frac{mT_2+n}{k_0}R_0) =$$

$$= (p-c)\int_0^{T_1}[(aR^2(t)+bR(t)+\tilde{c})]dt - \alpha_{max}T_1 +$$

$$+\int_{T_1}^{T_2}\begin{pmatrix}(p-c)(aR_0^2(t)+bR_0(t)++\tilde{c}) - \\ -\frac{mt+n}{k_0}R_0(t)\end{pmatrix}dt - \\ -\frac{1}{k_0}\frac{m}{2ak_0(p-c)}(T_2-T_1) - DT_2 - G.$$

В данном случае, определить T_2 можно только численно. Результаты, полученные с помощью моделирования на ЭВМ, представлены на рис.3–5.

Заметим, что с ростом периода времени, когда фирма вкладывает максимальное количество денежных средств, а также при уменьшении эффекта «надоедания» рекламы общая длина цикла рекламной кампании и получаемая прибыль увеличиваются.

Заключение. В статье проанализирована математическая модель влияния рекламы на деятельность фирмы, производящей однородный товар, с учетом того эффекта, что при повторении рекламы она начинает «надоедать» и требуется смена рекламного ролика для возобновления ее действия на покупателей. Решена задача об оптимальном распределении во времени средств, выделяемой фирмой на рекламу. В качестве критерия оптимальности выбрана прибыль фирмы в единицу времени.

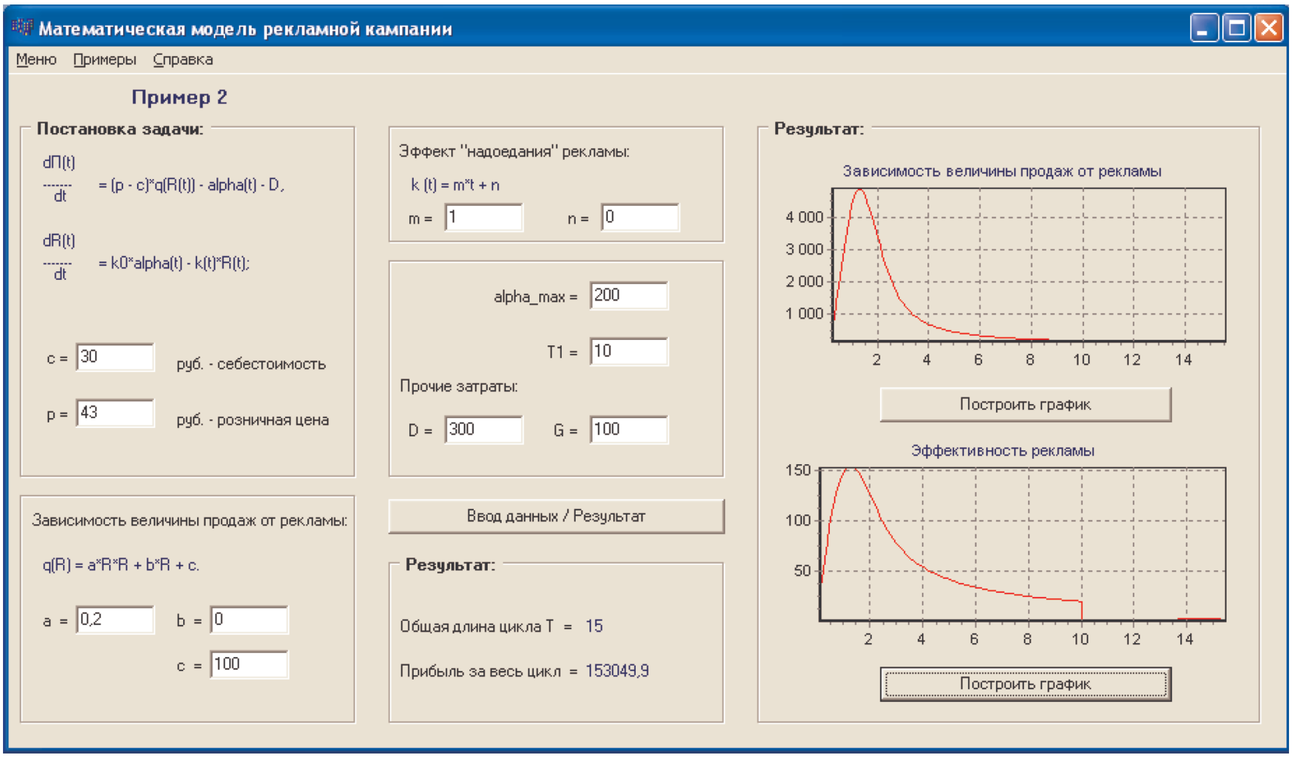

Рис. 3. Результат работы программы

Для рекламной кампании с фиксированной ценой продажи товара были рассмотрены несколько этапов жизни цикла рекламного ролика. А именно: период раскрутки рекламы и стационарный режим, а также найдены формулы для:

1. Определения оптимального уровня рекламы, который обеспечивает максимальную прибыль в единицу времени.
2. Определения общей длины жизни цикла рекламного ролика.
3. Определения дохода фирмы.

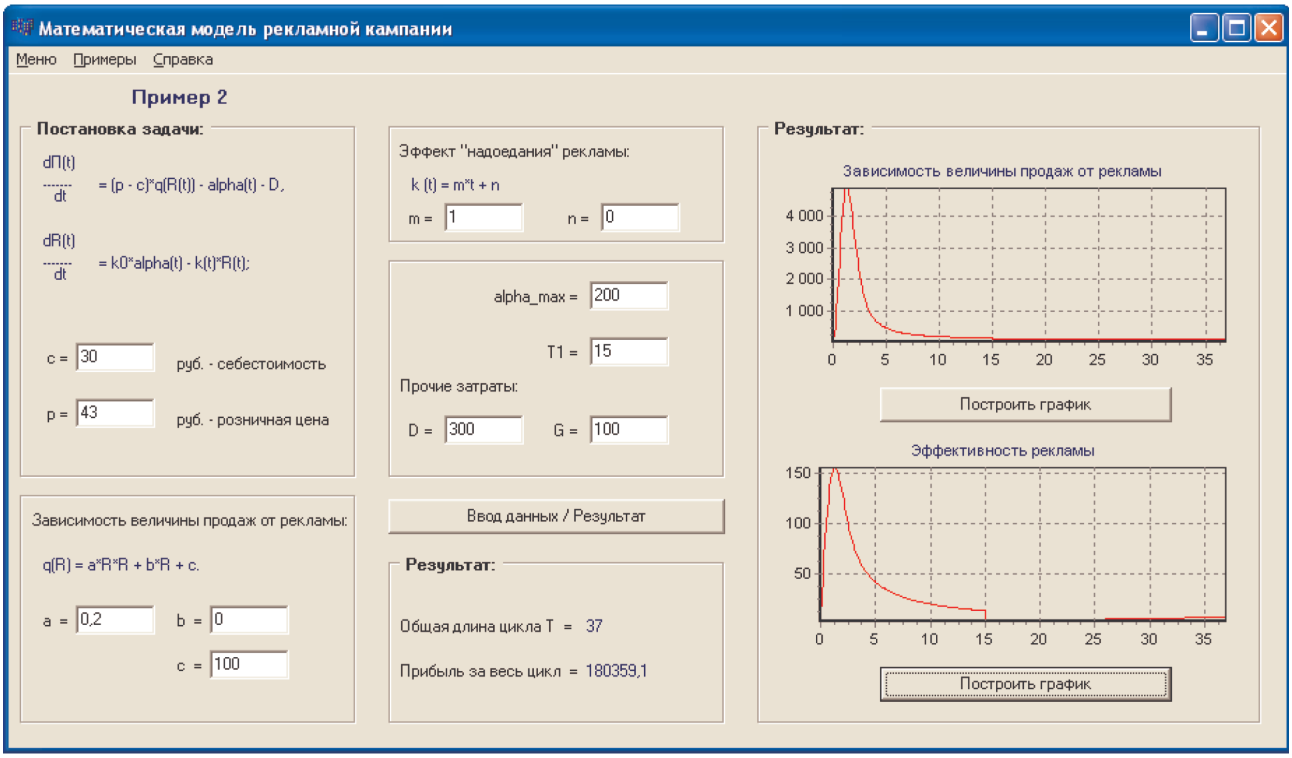

Рис. 4. Результат работы программы при изменении T_1

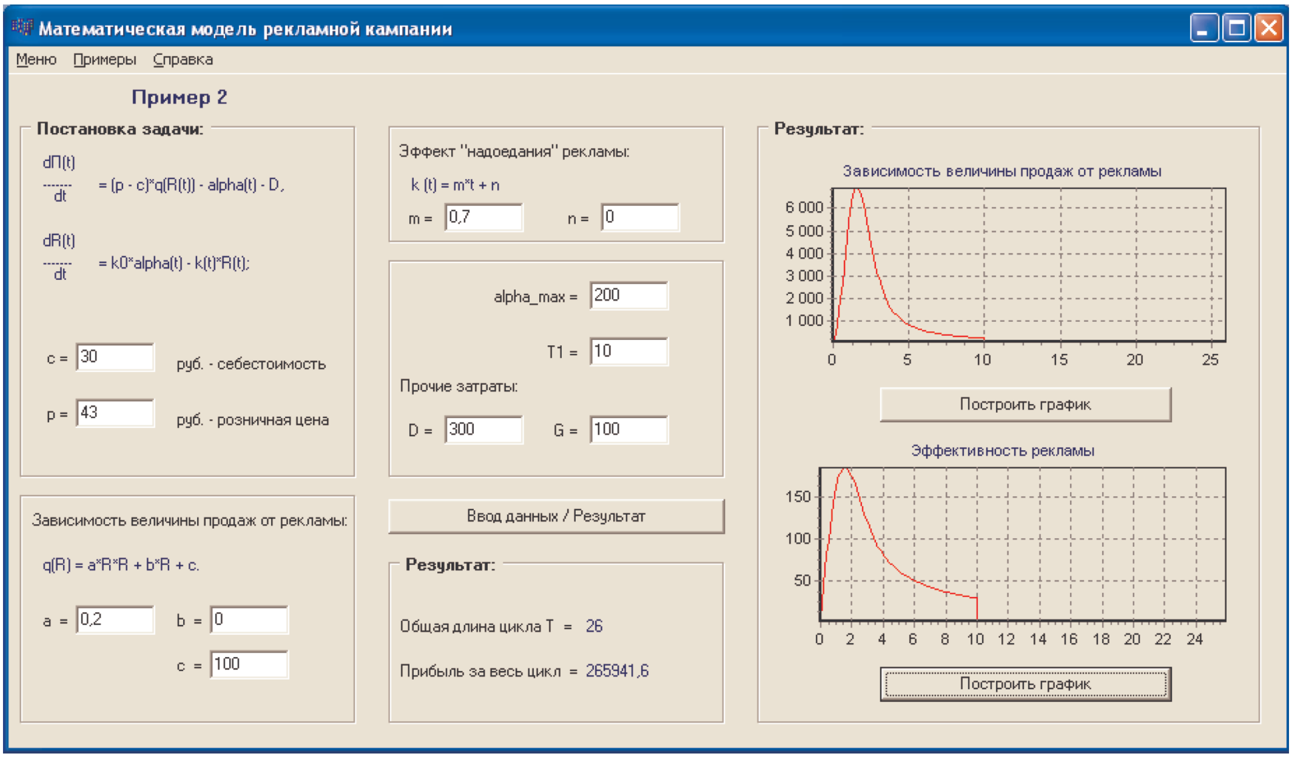

Рис. 5. Результат работы программы при изменении *k(t)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Батра Р. Рекламный менеджмент : учеб.пособие / Р. Батра, Дж.Дж. Майерс, Д. А. Аакер. — 5-е изд. — М.; СПб.; К. : Вильяме, 2004. — 784 с.

2. Ахмедова Д. Д. Оптимизация деятельности страховой компании с учетом расходов на рекламу / Д. Д. Ахмедова, О. А. Змеев, А. Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. — 2002. — №275. — С. 181–184.

3. Терпугов А. Ф. Математическая модель оптимального вложения средств в рекламную кампанию / А. Ф. Терпугов, Н. П. Щирова // Вестник Томского государственного университета. — 2002. — №275. — С. 224–227.

4. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры : научное издание / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.

5. Бригхэм Ю. Ф. Анализ финансовой отчетности. Финансовый менеджмент : учеб. пособие / Пер. с англ. под ред. к. э. н. Е. А. Дорофеева — 10-е изд. — СПб. : Питер, 2009. — 960 с.

6. Астафьева Е. В. Модель рекламной кампании с эффектом «надоедания» рекламы / Е. В. Астафьева, А. Ф. Терпугов // Вестник Томского государственного университета. — 2004. — №284. — С 34–36.

7. Галеев Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. — М. : Элиториал УРСС, 2000. — 320 с.

8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / учебное пособие для вузов / Л. С. Понтрягин. — М. : Наука, 1974. — 331 с.

9. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах) : учебник для студентов университетов и втузов / Л. Д. Кудрявцев — М. : Высшая школа, 1981. — 584 с.

10. Рекламное агентство: [сайт]. — (URL: http://www.ra-luxury.ru/pr/reklamana-transporte.html) (дата обращения: 06.05.2012).